Universidad Nacional de San Juan Facultad de Ingeniería

MÉTODOS NUMÉRICOS

Ingeniería CIVIL y ELECTRONICA

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Prof. Beatriz Morales
Profesor Asociado	Ing. Agustina Garcés
Profesor Adjunto	Ing. Marión Castro.
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Pablo Marcuzzi
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Germán Rodrigue

Año 2021

ECUACIONES DIFERENCIALES

INTRODUCCIÓN

Las leyes fundamentales de la física, mecánica, electricidad y termodinámica están basadas con frecuencia en observaciones experimentales que explican variaciones en las propiedades físicas y estados de los sistemas. Estas leyes, ecuaciones, se expresan en términos de los cambios espaciales y temporales de las variables intervinientes. Es por ello que las ecuaciones diferenciales tienen importancia fundamental en las aplicaciones de ingeniería ya que numerosos procesos físicos son idealizados matemáticamente por éstas.

Estudiaremos en este Tema algunos métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias y en sistemas de E.D.O.

GENERALIDADES

Del cálculo diferencial, conocemos que:

> *Dada una función $y = f(x)$, su derivada $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$, es también una función que se puede encontrar mediante ciertas reglas.*

Ejemplo: Sea la función

$$y = e^{-x^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -3x^2 \cdot e^{-x^3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -3x^2 \cdot y$$

Es decir a partir de la función se puede obtener la Ecuación Diferencial que tiene como solución dicha función

Nosotros estudiaremos el proceso inverso, o sea , dada la Ecuación Diferencial trataremos de calcular la función solución, o sea

Si se da una ecuación diferencial como

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 \cdot y$$

hallar de alguna manera una función

$$y = f(x)$$

que satisfaga dicha ecuación.

Es decir, buscamos *resolver* las ecuaciones diferenciales. Una ecuación diferencial es una ecuación cuya incógnita es una función y en la que aparecen algunas derivadas de esa función.

En Cálculo II estudiaron como calcular la solución de Ecuaciones Diferenciales en forma exacta. La cual no siempre es posible calcular. Ya sea porque no hay método analítico que la resuelva, o porque no cumple con las condiciones necesarias para aplicar los métodos ya existentes.

Definición de Ecuación Diferencial

Llamamos *ecuación diferencial* (E. D.) a una ecuación que relaciona; una función (o variable dependiente), con su variable o variables (variables independientes), y sus derivadas.

Si la ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente entonces, se dice que es una *ecuación diferencial ordinaria* (E. D. O.).

Si contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes se llama *ecuación en derivadas parciales* (E. D. P.).

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son

$$\frac{dy}{dx} - 4 = 2 \qquad , \qquad (x + 2y)dx - 3ydy = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = 0 \quad , \qquad y''(x) + d\ sen\big(y(x)\big) = 0 \quad (2)$$

Orden de una E.D.

Se *llama orden de la ecuación diferencial* al mayor orden de derivación ya sea derivada parcial o derivada total que aparece en la ecuación diferencial

Así, por ejemplo, las ecuaciones (1) son de orden 1, las ecuaciones (2) son de orden 2.

Formas de expresar una Ecuación Diferencial

Forma Implícita Decimos que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en *forma implícita* cuando tiene la forma:

$$\mathrm{F}\big(\mathrm{x}, \mathrm{y}, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0$$

Forma Explícita

Una Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden está expresada en forma explícita cuando se puede despejar y' en función de la función desconocida y de la variable independiente , es decir

$$y' = f(x, y)$$

E.D.O. LINEAL: Una ecuación D.O. es lineal cuando las funciones incógnitas y sus derivadas aparecen elevadas a la uno.

SOLUCIÓN:

La *solución de una E.D.O de orden n* es una función, n veces derivable, que al ser llevada a la ecuación la convierte en una identidad.

Existen dos tipos de solución:

Solución General cuando se conoce la función solución y aparecen tantas constantes arbritarias como orden de la E,D.

Solución Única : cuando las constantes arbritrarias se calculan reemplazando las condiciones iniciales

Estudiaremos los métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden expresada en forma explícita con la condición inicial. O sea

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & \quad E.D.O. \, de \; primer \; orden \\ y_0 = y(x_0) & \quad Concicón \; Inicial \end{cases}$$

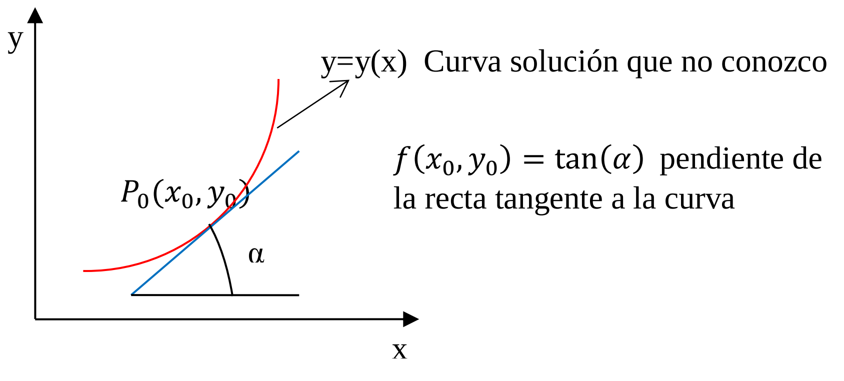
donde y es la variable dependiente y x es la variable independiente.

1. Interpretación Geométrica del problema

El problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Geométricamente el valor $y' = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = f(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva $y = y(x)$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$. Figura 1



Donde $y = y(x)$ es la curva solución desconocida

$P_0(x_0, y(x_0))$ es un punto que pertenece a la curva solución

Figura 1

2. **Solución**

El problema es hallar la función solución $y = y(x)$ mediante el cálculo de un punto a partir de uno ya conocido

En el caso de no poder hallar la solución de la E.D.O. de primer orden por los métodos ya conocidos recurrimos a los métodos numéricos, para hallar la ***solución aproximada*** con un cierto margen de error que dependerá del método a utilizar. La idea es que a partir del punto P_0 calcular una serie de puntos obteniendo una poligonal que será la aproximación a la curva desconocida

RESOLUCIÓN POR MÉTODOS NUMÉRICOS

MÉTODO DE EULER

El método de Euler o método de las tangentes es una de las técnicas más simples.

Consiste en "remplazar" la ordenada de la ***curva solución*** (no conocida) por su "***tangente***" (conocida).

Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

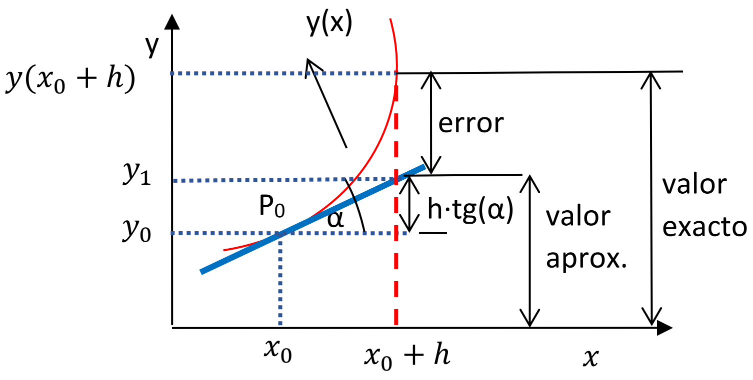


Figura 2

$$tag(\alpha) = f(x_o, y_o) = f(P_o) \qquad\qquad y(x_o + h) = ?$$

Aplicando relaciones trigonométricas observando la Figura 2

$$y(x_o + h) \cong y_o + h * tag(\alpha) = y_o + h * f(P_o)$$

Consiste en considerar la aproximación dada por el desarrollo de Taylor de primer orden hasta la derivada primera . Se obtiene a partir de $P_o(x_0, y_0)$ se puede calcular $P_1(x_1, y_1)$

$$x_1 = x_0 + h \qquad y_1 = y_o + h * f(P_o)$$

$$x_2 = x_1 + h \qquad y_2 = y_1 + h * f(P_1)$$

$$x_3 = x_2 + h \qquad y_3 = y_2 + h * f(P_2)$$

Así sucesivamente, se construye una nube de puntos (x_i, y_i) que determinan una poligonal que aproxima a la **curva solución.** Mientras menor es el incremento h más próxima es la poligonal a la curva solución desconocida

Algoritmo de Euler

$$\mathrm{y}_{i+1} = \mathrm{y}_i + \mathrm{h} * \mathrm{f}(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) \qquad i = 1,2, \ldots . n - 1$$

de esta forma, se obtienen n-puntos $P_i(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)$ aproximados a los valores de la solución. Figura 2

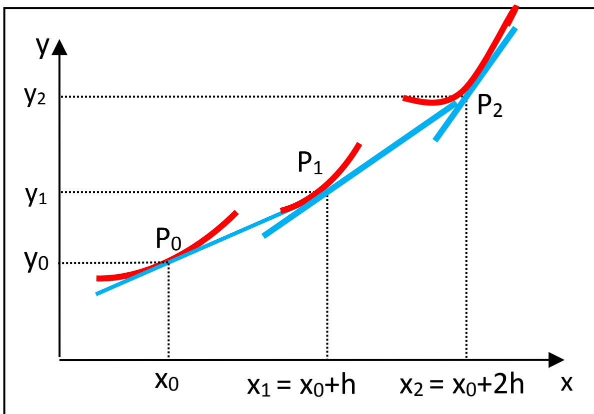


Figura 2

- Ejemplo 1:

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad Hallar\ y(0.5)$$

Tomamos h= 0.1 y reiteramos 5 veces el cálculo

Paso i	$x_i = x_{i-1}$	y_i	f $(x_i, y_i) = x_i + y_i$	$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$
0	0	1	1	$y_1 = 1 + 0.1. (1) = 1.1$
1	0.1	1.1	1.2	$y_2 = 1.1 + 0.1. (1.2) = 1.22$
2	0.2	1.22	1.42	$y_3 = 1.22 + 0.1. (1.42) = 1.362$
3	0.3	1.362	1.662	$y_4 = 1.362 + 0.1. (1.662) = 1.5282$
4	0.4	1.5282	1.9282	$y_5 = 1.5282 + 0.1. (1.9282) = 1.72102$

- **Ejemplo:**

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad Hallar\ y(0.5)$$

Tomamos h= 0.05 y reiteramos hasta llegar a x=0.5

Paso i	$x_i = x_{i-1}$	y_i	$f(x_i, y_i) = x_i + y_i$	$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$
0	0	1	1	1.05
1	0,05	1,05	1,1	1,105
2	0,1	1,105	1,205	1,16525
3	0,15	1,16525	1,31525	1,2310125
4	0,2	1,2310125	1,4310125	1,30256313
5	0,25	1,30256313	1,552563125	1,38019128
6	0,3	1,38019128	1,680191281	1,46420085
7	0,35	1,46420085	1,814200845	1,55491089
8	0,4	1,55491089	1,954910888	1,65265643
9	0,45	1,65265643	2,102656432	1,75778925

La solución exacta será:

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad Hallar\ y(0.5)$$

Vemos que se trata de una ecuación diferencial de primer orden lineal,

$$y' - y = -x \qquad (1)$$

La ecuación característica de la homogénea asociada es:

$$y' - y = 0 \qquad E.C. \quad r - 1 = 0 \quad r = 1$$

Luego la solución general de la homogénea asociada es :

$$y_H = Ce^x$$

La particular correspondiente teniendo en cuenta el segundo término es un polinomio de grado 1 completo esto es

$$y_p = Ax + B$$

Reemplazando en la ecuación diferencial completa y comparando los coeficientes tenemos:

tenemos

$$\begin{array}{rl} y'_p = & A \\ -y_p = & -Ax - B \\ \hline x = & -Ax + (A - B) \end{array}$$

Comparando los términos de la tercera línea se puede concluir que :

$$\begin{array}{l} A = -1 \\ A - B = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = B \qquad \Longrightarrow \qquad B = -1 \end{array}$$

Luego la Solución Particular es:

$$y_p = -x - 1$$

Entonces la general de la completa es

$$y_G = y_H + y_p$$

$$\boldsymbol{y_G = Ce^x - x - 1}$$

Para hallar la solución única reemplazamos la condición inicial y(0)=1

$$y(0) = Ce^0 - 0 - 1 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad C = 2$$

Luego la solución única es

$$\boldsymbol{y(x) = 2e^x - x - 1}$$

Entonces

$$y(0.5) = 1.7974$$

Se puede observar que al comparar el error con el valor aproximado para h=0.1 es

$$|Vexacto - Vaproxi.| = |1.7974 - 1.7210| = \underline{\mathbf{0.0764}}$$

Para h=0.5

$$|Vexacto - Vaproxi.| = |1.7974 - 1.7578| = \underline{\mathbf{0.0396}}$$

Se observa que el error es menor cuando h es más pequeño, pero este error también depende del error de redondeo producido según la precisión de la calculadora u ordenador con el que se realicen los cálculos.

IMPLEMENTACIÓN EN OCTAVE DEL MÉTODO DE EULER

```
>> % Cargar la Ecuación Diferencial Ordinaria
>> yP=@(x,y)  x+y
>> % Ingresar las CI
>> x(1)=0
>> y(1)=1;
>> % Ingresar el  Paso del  Método
>> h=0.1
>> % Inicio del  Método Iterativo, en cada paso se obtiene un punto de la nube solución .
>> % Paso 0
>> f1=yP(x(1),y(1)) ;  y(2)=y(1)+h*f1
>> % Paso 1
>> x(2)=x(1)+h;  f2=yP(x(2),y(2));  y(3)=y(2)+h*f2;
>> % Paso 2
>> x(3)=x(2)+h;  f3=yP(x(3),y(3)); y(4)=y(3)+h*f3;
>> % Paso 3
>> x(4)=x(3)+h; f4=P(x(4),y(4)); y(5)=y(4)+h*f4;
>> % Paso 4
>> x(5)=x(4)+h; f5=yP(x(5),y(5)); y(6)=y(5)+h*f5;
>> x(6)=x(5)+h;
>> plot(x,y,'*r')
```

Se puede pensar en crear una función en Octave con el método de Euler que resuma estos pasos

Este programa tendrá como argumentos de entrada

Datos

- la función $f(x,y)$ que es la derivada de y(x)
- el valor inicial x0
- el valor final xf
- la condición inicial $\mathrm{y(x0) = y0}$
- n : cantidad de puntos (pasos) que quiero calcular para llegar a xf

Ya sabemos como calcular el valor de h si quiero llegar de x0 a xf tomando n-puntos Para ello debo considerar cuantas etapas (pasos) quiero hacer: h=(xf-x0)/(n-1)

```
function [x y]=euler_edo(yP,x0,xf,y0,n)
h=(xf-x0)/(n-1)
x(1)=x0;
y(1)=y0
for i=1:n-1
    x(i+1)=x(i)+h;
    y(i+1)=y(i)+h*yP(x(i),y(i));
end
```

La salida del programa es

- x vector que contiene los valores generados desde x0 hasta xf
- y vector de los valores aproximados de la función en cada x(i)

Para ejecutar el programa se debe definir los argumentos de entrada en el espacio de trabajo. Recordar que la derivada debe estar explícita o sea debemos despejar y' expresar $y' = f(x,y)$

Veamos para el ejemplo resuelto anteriormente donde

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \\ y(0.5) = ? \end{cases}$$

```
>> yP=@(x,y)   x+y
>>  x0=0;xf=0.5; y0=1 % valor inicial , valor final y condición inicial
>> n=10          % cantidad de pasos
>> [x y]=EULER_EDO(yP,x0,xf,y0,n);
>>plot(x,y)
```

Si quiero saber cuanto vale la función en 0.5 es

```
>>y(n)
```

RESOLUCIÓN USANDO FUNCIONES PROPIAS DE OCTAVE:

Octave tiene funciones propias (ode23, ode45que permite hallade primer orden en los que hay que ingresar las condiciones iniciales y el intervalo de trabajo. En estos archivos están programado los métodos de Runge de 2º orden y de 4º orden respectivamente, modificados, ellos generan el valor de h más conveniente para obtener el menor error posible

Para el caso de un problema de valor inicial

$$y' = f(x,y) \qquad E.D.O.\,de\ primer\ orden$$
$$y_0 = y(x_0) \qquad Concición\ Inicial$$

Los argumentos de entrada son:

- deriv es el nombre de la función derivada o sea
  dervi=@(x,y) x+y
- [x0 xf] Un vector cuyas componentes son el valor inicial x0=0 y el valor final xf=0.5
- y0 es el valor de la función en x0 o sea $y0 = 1$

Los argumentos de salida son

- El vector x que tiene los valores de las componentes de x entre x0 y xf que el programa va generando al aplicar el método
- El vector y que son los valores de las ordenadas de la función que calcula el programa en forma aproximada correspondiente a cada valor de x

La sentencia es

[x,y]=ode23(deriv,[xo xf],[y0])

Un ejemplo será:

```
>> [x, y]=ode23(deriv, [0 0.5] ,1);
>> plot(x,y)  % grafica la curva aproximada a la solución obtenida con ode23
```

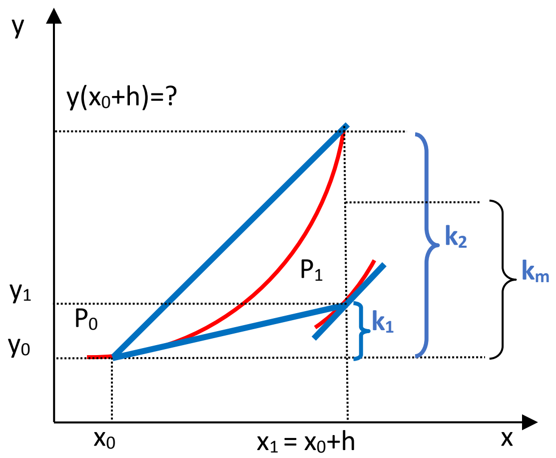
Nota: Si se lo llama sin usar argumentos de salida, se grafica la solución

Método de Euler Mejorado:

Este método está basado en Euler con una modificación que hace que el error general sea menor y es comparable al error cometido con una aproximación de Taylor de 2º orden

Para ello se calcula primero $P_1(x_o + h, y_1)$ por Euler, y luego se corrige o mejora el valor de y_1 para ello se traza una paralela a la tangente a la curva que pasa por $P_1(x_o + h, y_1)$ por $P_o(x_o, y_o)$ y al interceptarse con la recta vertical que pasa por $x_o + h$ se obtiene el segmento k_2 , luego se hace un promedio de k_2 con k_1 y se obtiene una corrección de y_1 (Figura 3)

$$y_1 = y_o + \underbrace{h * f(P_o)}_{k_1} \qquad con\ \ P_o(x_o, y_o) \qquad \text{determino} \qquad P_1(x_o + h, y_1)$$



$$k_1 = h * f(P_o)$$

$$k_2 = h * f(P_1)$$

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Figura 3

$$y_1 = y_o + \underbrace{h * f(P_o)}_{k_1} \qquad con\ \ P_o(x_o, y_o) \qquad \text{determino} \qquad P_1(x_o + h, y_1)$$

$$y(x_o + h) \cong y_o + h * \left(\frac{f(P_o) + f(P_1)}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y_1 = y_o + h * f(x_o, y_o) & EULER \\ \bar{y}_1 = y_o + h * \left(\dfrac{f(P_o) + f(P_1)}{2}\right) & Euler\ Mejorado\ (*) \end{cases}$$

La formula (*) se puede expresar como $y(x_o + h) \cong y_o + h * \bar{f}$ donde $\bar{f}$ es el promedio de la f evaluada en P_o y en P_1. Esta idea se generaliza con evaluaciones en varios puntos. Los métodos más desarrollados usan comúnmente 4 puntos (por ejemplo los de Runge Kutta).

Cualquiera sea la formula se construye un nuevo punto (x_{i+1}, y_{i+1}) a partir de uno conocido (x_i, y_i):

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + h * \bar{f}(x_i, y_i) \qquad \bar{f} \text{ promedio } \ \text{y} \ \ (x_o, y_o) \text{ es dato} \end{aligned}$$