Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MÉTODOS NUMÉRICOS

Ingeniería Civil
Ingeniería Electrónica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Prof. Beatriz Morales
Profesor Asociado	Ing. Agustina Garcés
Profesor Adjunto	Ing. Marión Castro.
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Pablo Marcuzzi
Jefe de Trabajos Prácticos	Germán Rodriguez

Año 2021

SISTEMAS LINEALES

(Primer semana)

Un sistema de Ecuaciones Lineales es un conjunto de ecuaciones polinómicas de primer grado de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema de ***"m"*** ecuaciones con ***"n"*** incógnitas.

Los números reales

a_{ij} se denominan coeficientes del sistema

b_i se denominan términos independientes

Resolver un sistema consiste en calcular los valores x_{ij} (incógnitas) que verifican simultáneamente **todas** las ecuaciones.

Dos sistemas son equivalentes cuando tienen la misma solución.

Todo sistema lineal se puede expresar en forma matricial como

$$A.x = b$$

Siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Donde

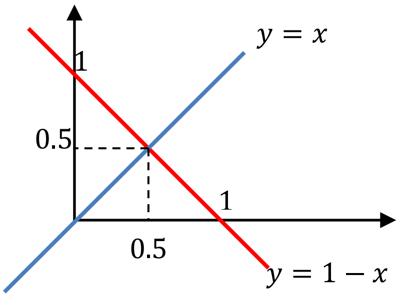
- A es la matriz de los coeficientes de orden **(m,n)** donde el número de filas "**m**" coincide con la cantidad de ecuaciones, y el número de columnas "**n**" con el número de incógnitas
- x es un vector vertical que contiene las incógnitas de orden **(n,1)**
- b es el vector de los términos independientes de orden **(m,1)**

REPASO

Vamos a repasar los conceptos de Sistemas Lineales visto en Álgebra. Para ello veamos algunos ejemplos

Representar gráficamente, expresar en forma matricial y resolver los siguientes sistemas

Ejercicio 1



Un punto en común S. U.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

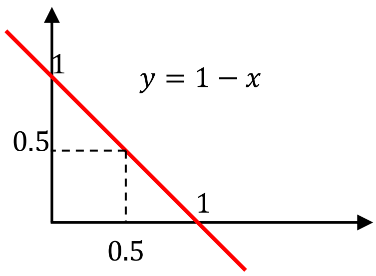
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} F_1 \\ F_1 - F_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\textit{Escribiendo el sistema equivalente}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \textit{despejando} \quad \begin{array}{l} x = 0.5 \\ y = 0.5 \end{array} \ \textit{Solución}$$

Figura 1

Ejercicio 2



Dos rectas coincidentes

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

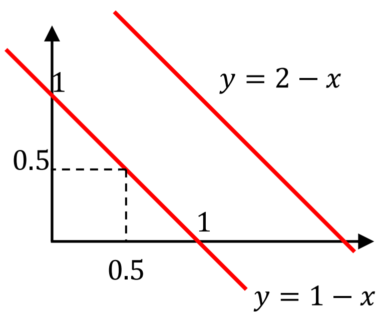
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} F_1 \\ 2F_1 - F_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\textit{Escribirndo el sistema equivalente}$$

$$\{x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \quad \textit{Infinitas soluciones}$$

Figura 2

Ejercicio 3



Dos rectas paralelas

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} F_1 \\ 2F_1 - F_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\textit{Escribiendo el sistema equivalente}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0y = -2 \end{cases} \Rightarrow \textit{No existe solución}$$

Figura 3

Observaciones:

1. En el Ejercicio 1 (Figura 1) podemos observar que :
    - Al aplicar eliminación de Gauss a la matriz asociada al sistema junto con la columna de los términos independientes, llamada matriz ampliada, obtenemos un sistema equivalente cuya solución es más sencilla de resolver. Despejando el valor de "y" se obtiene $y = 0.5$. Luego reemplazando este valor en la otra ecuación se obtienen $x = 0.5$. Esto indica que el sistema tiene ***solución única***.
    - Además esto queda visualizado en la gráfica. En este ejemplo cada ecuación representa una recta , y en este sistema las rectas se cortan en un punto que coincide (es lo esperado) con la solución del sistema calculada analíticamente.
    - En lo que respecta a la matriz ampliada ($AA = [A\ b]$) formada por la matriz de los coeficientes agregando al final la columna de los términos independientes, después de la eliminación de Gauss se puede observar que las filas no nulas de la matriz A y de la ampliada es igual a 2, o sea las dos filas son ***linealmente independientes***

2. En el Ejercicio 2 (Figura 2)
    - Al aplicar la eliminación de Gauss el sistema equivalente que se obtiene es una sola ecuación , luego al despejar la variable "y" se obtiene una expresión que depende de la variable "x"
      O sea hay ***infinitas soluciones***, con un grado de libertad
    - Gráficamente se puede observar que las dos ecuaciones representan a la misma recta, que es la solución del sistema. Cada punto de la recta verifica al sistema
    - A diferencia del ejemplo 1 al aplicar la eliminación de Gauss, se anula toda una fila tanto en A como en la matriz Ampliada, esto significa que las filas son ***linealmente dependientes***

3. En el Ejercicio 3 (ver Figura 3)
    - Al aplicar eliminación Gaussiana el sistema equivalente obtenido, no tienen solución, pues no existe un valor de "y" que cumpla $0y = -2$. Esto indica que el sistema ***no tiene solución***.
    - Gráficamente se puede observar que las ecuaciones representan un par de rectas paralelas, luego no hay intersección entre las rectas, esto verifica que el sistema no tiene solución.
    - Al aplicar la eliminación de Gauss la matriz de los coeficientes tiene una sola línea distinta de cero, o sea una fila linealmente independientes, mientras que en la matriz ampliada con los términos independientes el número de líneas no nulas es dos. O sea ambas matrices tienen ***distinto número de filas linealmente independiente.***

Definición de Rango de una Matriz

"Se llama rango de una matriz al número de filas linealmente independientes"

Según esta definición se puede decir que

1. En el Ejercicio 1 se cumple

$$\left.\begin{array}{r} rango(A) = 2 \\ rango(AA) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \; El\ sistema\ tiene\ solución$$

$$rango(A) = 2 = n \quad Solución\ única$$

2. En el Ejercicio 2 se cumple:

$$\left.\begin{array}{r} rango(A) = 1 \\ rango(AA) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \; El\ sistema\ tiene\ solución$$

$$rango(A) < n \quad Infinitas\ soluciones$$

3. En el Ejercicio 3 se cumple:

$$\left.\begin{array}{r} rango(A) = 1 \\ rango(AA) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \; El\ sistema\ no\ tiene\ solución$$

Esto se puede generalizar en el siguiente teorema, simbolizaremos con $r(A)$ al rango de una matriz A

Teorema

Sea un sistema lineal $Ax = b$ con m-ecuaciones y n-incógnitas, siendo $m = n$. Se define con el nombre de AA a la matriz ampliada, la cual está formada por la matriz de coeficientes y la última columna es la de los términos independientes, Luego

1) El sistema tienen solución si y sólo si $r(A) = r(AA)$
   a) Si $r = n$ el sistema tiene SOLUCIÓN ÚNICA
   b) Si $r < n$ el sistema tiene INFINITAS SOLUCIONES siendo
      $gl = n - r$ el número de grados de libertad de la solución
2) Si $r(A) \neq r(AA)$ el sistema NO TIENE SOLUCIÓN

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Los métodos visto por ustedes anteriormente son:

- Método de Igualación
- Método de Sustitución
- Método de Determinantes
- Método de Gauss

Estos métodos son sencillos de aplicar para sistemas de orden 2x2 o 3x3 a lo sumo. Para sistemas de mayor orden resultan complicados. De todos ellos vamos a repasar el método de Gauss

MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss consiste en transformar el sistema dado en otro sistema equivalente triangular superior, que se resuelve fácilmente mediante sustitución regresiva. Se trabaja con la matriz de los coeficientes ampliada con los términos independientes.

Las operaciones permitidas para transformar el sistema dado en otro equivalente son:

- ✓ Multiplicación de una fila por una constante distinta de cero
- ✓ Sumar a una fila el múltiplo de otra fila
- ✓ Intercambiar dos filas

<u>Ejemplo 1</u> : Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Escrito en forma matricial

$$Ax = b$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Si aplicamos Gauss el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccc} f_1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ f_2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ f_3 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ \hline f_1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ f_2 = f_2 + f_1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ f_3 = f_3 - 2f_1 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

Resultando un sistema equivalente al dado cuyas matrices asociadas son

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad AAE = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rango(A) = rango(AE) = 3 \qquad rango(AA) = rango(AAE) = 3$$

Los rangos de la matriz de los coeficientes AE y de la matriz ampliada AAE del sistema equivalente son iguales, luego por el Teorema el sistema tiene solución, además el rango es 3 y coincide con el número de incógnitas, luego la solución es única

Escribimos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ \quad 2y - z = 1 \\ \qquad 5z = 0 \end{cases}$$

Sistema triangular superior equivalente al dado cuya solución se obtiene por sustitución regresiva que consiste en despejar de la última ecuación el valor de la incógnita “z”, luego reemplazar su valor en la ecuación anterior y despejar “y”, y con estos valores despejar “x” de la primera ecuación obteniendo

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ y &= \frac{1}{2} \\ x = 1 - y &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

La solución única del sistema es $x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2} \quad z = 0$

Ejemplo 2 Resolver

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Este sistema escrito en forma matricial será

$$Ax = b$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

Aplicando Gauss se tiene

$Operación$	k_1	k_2	k_3	k_4	b	
	1	−1	2	1	−2	
	2	1	1	1	3	
	3	0	3	2	1	
	1	1	1	−3	0	
f_1	1	−1	2	1	−2	a_{11} *es el pivote*
$f_2 = f_2 - 2f_1$	0	3	−3	−1	7	
$f_3 = f_3 - 3f_1$	0	3	−3	−1	7	
$f_4 = f_4 - f_1$	0	2	−1	−4	2	
f_1	1	−1	2	1	−2	
f_2	0	3	−3	−1	7	a_{22} *es el pivote*
$f_3 = f_3 - f_2$	0	0	0	0	0	
$f_4 = 3f_4 - 2f_2$	0	0	3	−10	−8	
f_1	1	−1	2	1	−2	
f_2	0	3	−3	−1	7	
$f_3 = f_4$	0	0	3	−10	−8	*intercambiamos la fila* 3 *y* 4
$f_4 = f_3$	0	0	0	0	0	

De esta forma se ha obtenido un sistema triangular superior equivalente al dado (o sea tienen la misma solución) cuya expresión matricial será

$$AEx = bE$$

donde

$$AE = \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad AAE = \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Nuevamente observamos que tanto la matriz de coeficientes AE y la ampliada AAE del sistema equivalente tienen 3 filas linealmente independientes, luego el rango de ambas es 3. Esto indica que el sistema tiene solución, pero en este caso el rango es menor que el número de incógnitas resultando $gl = n - r = 4 - 3$ lo que indica que el sistema tiene infinitas soluciones con un grado de libertad.

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_2 - 3\,x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_3 - 10x_4 = -8 \\ 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Aplicando el método de sustitución regresiva que consiste en despejar de la última ecuación el valor de la incógnita y reemplazarlo en la ecuación inmediata anterior, de esa manera se van obteniendo los valores de las incógnitas.

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{3} + x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = -\frac{8}{3} + \frac{10}{3}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Reemplazando los valores obtenidos

$$\begin{cases} x_1 = -2 + \frac{-1}{3} + \frac{11}{3}x_4 - 2\left(-\frac{8}{3} + \frac{10}{3}x_4\right) - x_4 = 3 - 4x_4 \\ x_2 = \frac{7}{3} - \frac{8}{3} + \frac{10}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{-1}{3} + \frac{11}{3}x_4 \\ x_3 = -\frac{8}{3} + \frac{10}{3}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

La solución del sistema resulta

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 4x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{11}{3}x_4 \\ x_3 = -\frac{8}{3} + \frac{10}{3}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Escrito en forma matricial es :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{solución \\ particular}} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{solución \\ general \\ del\ sistema \\ homogéneo}}$$

Si analizamos la solución observamos que consta de dos partes, una que depende de los términos independientes de allí el nombre de *solución particular* puesto que si se cambia al menos un número de los términos independientes, esta solución cambia, mientras que el resto de la expresión es la solución del sistema homogéneo asociado, ya que si los términos independientes son todos nulos, el proceso de Gauss daría por resultado

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_3 - 10x_4 = 0 \\ 0x_4 = 0 \end{cases}$$

La solución escrita en forma matricial será

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observación

Esta estructura de la solución es propia de los sistemas lineales, si recuerdan las Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden “n”, la solución siempre tiene la forma de la suma de un término que depende del segundo miembro, llamada solución particular, y el resto de los términos es la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

En el curso de Método Numéricos estudiaremos los siguientes métodos de resolución de sistemas lineales:

- **Método de Gauss**
- **Método de Gauss Jordan**
- **Método LU**
- **Método QR**

El primero es el que acabamos de desarrollar en forma de repaso.

MÉTODO DE GAUSS JORDAN

El método de Gauss Jordan es una variante del método de eliminación de Gauss. Este método a diferencia de Gauss entrega como resultado una matriz identidad en vez de una triangular superior, lo cual es muy bueno porque evita realizar la sustitución regresiva para obtener la solución del sistema. Los ejemplos se desarrollarán con la computadora

Este es el método que trae programado OCTAVE o MATLAB, los dos trabajan con los mismos comandos, de manera que de aquí en adelante todo lo que se enuncie como trabajar en la computadora sirve para los dos programas.

Los pasos en general a seguir son:

1. Se cargan los datos de la matriz A asociada al sistema y vector de los términos independientes
2. Se forma la matriz ampliada y se calculan los rangos de ambas matrices con el comando **Rank.**
3. Se comparan los rangos, si son iguales el sistema tienen solución. Se compara con el número de incógnitas para determinar si la solución es única o tiene infinitas soluciones
4. Se obtiene el sistema equivalente aplicando el comando **rref** (que significa reducir la matriz en forma escalonada por filas), aplicado a la matriz ampliada, obteniendo el sistema escalonado, luego se escribe el sistema y se calcula la solución.

Nota:

La vez que aparezca el símbolo >> significa que son los comandos del programa que deben usar para resolver los ejercicios.

Ejemplos:

a) Resolver el sistema del Ejemplo 1 aplicando Gauss Jordan

1. Carga de datos
   ```
   >>A=[1 1 -3;-1 1 2;2 2 -1];   (enter)
   >>b=[1;0;2]
   ```
2. ```
   >>AA=[A b]
   AA =
        1     1    -3     1
       -1     1     2     0
        2     2    -1     2
   >>rank(A)
   ans = 3
   >> rank(AA)
   ans = 3
   ```

3. Los rangos son iguales y el número de incógnitas es 3 igual que el rango , luego el sistema tiene solución y es única

4. Como tiene solución única se puede proceder de dos maneras diferentes
   ```

- Aplicando el comando **“\”** que tiene programado para resolver sistemas lineales por el método más adecuado según las propiedades del sistema, uno de los métodos es el de Gauss Jordan. Pero también tiene programados otros métodos cuyo desarrollo no veremos en este curso**. Este comando se aplica solamente cuando el sistema es cuadrado y tiene solución única.**

  ```
  >> x=A\b
  x =

         1/2
         1/2
          -0
  ```

  De esta forma no escribimos el sistema equivalente
- En el caso que se pida escribir el sistema equivalente y hallar la solución se procede así

  ```
  >> rref(AA)
  ans =

         1        0        0      1/2
         0        1        0      1/2
         0        0        1       -0
  ```

  Luego el sistema equivalente es directamente la solución

  $$x = \frac{1}{2}$$
  $$y = \frac{1}{2}$$
  $$z = 0$$

  Solución igual que aplicando Gauss, pero no necesitamos aplicar el método de sustitución regresiva

b) Resolver el sistema dado en el Ejemplo 2 aplicando Gauss Jordan

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Los pasos a seguir son:

1. Se cargan los datos de la matriz A asociada al sistema y vector de los términos independientes

   ```
   >>A=[1 -1 2 1;2 1 1 1;3 0 3 2;1 1 1 -3]   (enter)
   >>b=[-2;3;1;0]      (enter)
   ```

2. Se forma la matriz ampliada y se calculan los rangos de ambas matrices con el comando **Rank**

```
>>AA=[A b]
AA =
  1  -1   2   1  -2
  2   1   1   1   3
  3   0   3   2   1
  1   1   1  -3   0

>> rank(A)

ans =  3

>> rank(AA)

ans =  3
```

3. En este caso $n = 4 \quad r = 3 \quad gl = 1$. Como el sistema tiene infinitas soluciones se utiliza el comando **rref**

```
>> rref(AA)
ans =
 Columns 1 through 4:

  1.00000   0.00000   0.00000   4.00000   3.00000

  0.00000   1.00000   0.00000  -3.66667  -0.33333

  0.00000   0.00000   1.00000  -3.33333  -2.66667

  0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
```

Si queremos que muestre los resultados en modo de fracciones se escribe el comando **format rat y de esa manera los número decimales los muestra como fracciones**

```
format rat

>> rref(AA)

ans =


     1     0     0      4      3

     0     1     0   -11/3   -1/3

     0     0     1   -10/3   -8/3

     0     0     0      0      0
```

4. Se reescribe el sistema equivalente obtenido

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_2 + 0\,x_3 - \dfrac{11}{3}x_4 = -\dfrac{1}{3} \\ x_3 - \dfrac{10}{3}x_4 = -\dfrac{8}{3} \\ 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Se puede observar que se obtiene directamente la solución del sistema si despejamos de cada ecuación el valor de x_i

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 4x_4 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{11}{3}x_4 \\ x_3 = -\dfrac{8}{3} + \dfrac{10}{3}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

También se puede expresar la solución en forma matricial como se hizo antes

Nota:
El método de Gauss Jordan entrega la solución directamente no es necesario aplicar el método de sustitución regresiva

c) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

1. Se cargan los datos
   Se cargan los datos de la matriz A asociada al sistema y vector de los términos independientes
   >>A=[1 -1 2 1;2 1 1 1;3 0 3 2;1 1 1 -3] (enter)
   >>b=[-2;3;1;0] (enter)

2. Se forma la matriz ampliada y se calculan los rangos de ambas matrices con el comando **Rank**

```
>>AA=[A b]
>> rank(A)
ans = 3
>> rank([A b])
ans = 4
```

3. En este caso los rangos son diferentes , luego el sistema no tienen solución

MÉTODO LU

El método de descomposición LU consiste en transformar una matriz A en producto de dos matrices

$$A = LU$$

Donde L es una matriz triangular inferior con diagonal unitaria

U es una matriz triangular superior

Un sistema lineal cuadrado (m=n) se resuelve aplicando el método de descomposición LU de la siguiente manera

Supongamos el sistema

$$Ax = b \qquad (1)$$

Si descomponemos la matriz A por el método de LU se tiene:

$$L\underbrace{Ux}_{z} = b$$

Asociando $Ux = z$ y reemplazando z en el sistema dado (1) se obtiene tiene el sistema triangular inferior

$$Lz = b \qquad (2)$$

Una vez obtenido el vector z del sistema (2) reemplazo en el sistema triangular superior (3)

$$Ux = z \qquad (3)$$

La solución del sistema (3) es la solución buscada del sistema (1).

El algoritmo que permite descomponer la Matriz de coeficientes del sistema A no es motivo de estudio de este curso, solamente analizaremos como se aplica el método mediante el uso de Octave.

Observaciones:

Si bien es cierto que al aplicar este método se resuelven dos sistemas, uno triangular inferior (2) y otro triangular superior (3), los cuales son muy sencillos de resolver, la ventaja de este método frente al de Gauus Jordan, consiste en que permite resolver distintos sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes, pero distintos términos independientes. El esfuerzo computacional para realizar la descomposición se realiza una sola vez, y luego dicha descomposición se aplica en los distintos sistemas. En cambio Gauss o Gauss Jordan deben aplicarse para cada sistema.

Método de Sustitución Regresiva

Este método se utiliza para resolver un sistema triangular superior de la forma

$$
\left\{
\begin{array}{r}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{ii}x_i + \cdots + \cdots + \cdots + u_{1n}x_n = b_1 \\
+u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2i}x_i + \cdots + \cdots + \cdots + u_{2n}x_n = b_2 \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
u_{ii}x_i + u_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + u_{in}x_n = b_i \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
u_{n-1n-1}x_{n-1} + u_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\
u_{nn}x_n = b_n
\end{array}
\right.
$$

El método consiste en despejar primero la última incógnita, y luego remplazarla en la inmediata anterior y así sucesivamente hasta llegar a la primera ecuación

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{(b_{n-1} - u_{n-1\,n}x_n)}{u_{n-1n-1}}$$

$$x_i = \frac{\left(b_i - u_{in}x_n - u_{in-1}x_{n-1} - \cdots - u_{i,i+1}x_{i+1}\right)}{u_{ii}}$$

Expresado en forma compacta es:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}x_j\right)$$

Algoritmo para resolver un sistema por sustitución regresiva

1. Cálculo del último elemento del vector solución $\boldsymbol{x}$

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

2. Para j variando de i+1 hasta n se repite esta expresión

   for j=i+1:n

   $x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}x_j\right)$

   end

Este algoritmo es un esquema que deberá expresarse en el lenguaje de programación que se quiera programar.

En Octave aprovechando la forma de trabajar en forma matricial se puede aplicar de esta manera

```
function   x=regresiva(U,b)
 %esta función calcula la solución de un sistema triangular superior
 % por el método de sustitución regresiva
 n=length(b);
 x=zeros(n,1);
 x(n)=b(n)/U(n,n);
 for i=n-1:-1:1
   x(i)=(b(i)-sum(U(i,i+1:n).*x'(i+1:n)))/U(i,i);
 endfor
endfunction
```

Método de Sustitución Progresiva

Este método se utiliza para resolver un sistema lineal triangular inferior. Consiste en despejar de la primera ecuación el valor de la primera incógnita y luego reemplazarla en la segunda ecuación, despejar la segunda incógnita, reemplazar los valores calculados en lsa tercera ecuación y despejar el valor de la tercer incógnita y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación obteniendo la solución total del sistema.

$$\begin{cases} L_{11}x_1 & = b_1 \\ L_{21}x_1 + L_{22}x_2 & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ L_{i1}x_1 + L_{i2}x_2 + \cdots + \cdots + L_{ii-1}x_{i-1} + L_{ii}x_i & = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ L_{n-11}x_1 + L_{n-12}\,x_2 + \cdots + \cdots + L_{n-1i}x_i + \cdots + \cdots + L_{n-1n-1}x_{n-1} & = b_{n-1} \\ L_{n1}x_1 + L_{n2}\,x_2 + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + L_{ni}\,x_i + \cdots + L_{nn-1}x_{n-1} + L_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{L_{11}}$$

$$x_2 = \frac{1}{L_{22}}(b_2 - L_{21}x_1)$$

$$x_i = \frac{1}{L_{ii}}(b_i - L_{i1}x_1 - L_{i2}x_2 - \cdots - L_{ii-1}x_{i-1})$$

Expresado en forma compacta es:

$$x_i = \frac{1}{L_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}x_j\right)$$

Algoritmo

1. Se calcula $x_1 = \frac{b_1}{L_{11}}$

2. for i=2:n

$$x_i = \frac{1}{L_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}x_j\right)$$

end

Se deja como ejercicio realizar el programa en OCTAVE

Ejemplo

Hallar la solución de los siguientes sistemas aplicando el método de LU.

$$\begin{cases} & a) & b) \\ x + y - 3z = 1 & 5 \\ -x + y + 2z = 0 & 3 \\ 2x + 2y - z = 2 & 1 \end{cases}$$

1) Se procede a la descomposición LU de la matriz de los coeficientes. Octave tiene un comando lu que da por resultado tres matrices, la matriz triangular inferior **L** la matriz triangular superior **U**, y una matriz **P** de permutaciones, son las permutaciones que se aplican a las filas de A para evitar dividir por cero. Estas permutaciones deben quedar registradas porque están aplicada a las filas de A, lo cual significa que cambian el orden de las ecuaciones, luego también deben aplicarse a los términos independientes para no alterar el sistema original.

En Octave se procede así

- Se introducen los datos
  ```
  >>A=[1 1 -3;-1 1 2;2 2 -1]
  >>b=[1;0;2]
  ```
- Se analiza si el sistema tiene solución y si tiene solución única
- En caso de tener solución única se aplica el comando lu a la matriz de coeficientes.
-
  ```
  >>[L U P]=lu(A)
  L =
     1.00000   0.00000   0.00000
    -0.50000   1.00000   0.00000
     0.50000   0.00000   1.00000
  U =
     2.00000   2.00000  -1.00000
     0.00000   2.00000   1.50000
     0.00000   0.00000  -2.50000
  ```

P

```
  0   0   1
  0   1   0
  1   0   0
```

La matriz P está indicando que la fila 1 fue intercambiada por la fila 3. Luego eso se debe hacer con el vector de los términos independientes. Se procede de la siguiente manera

```
>> bp=P*b
bp =

  2
  0
  1
```

- Aplicando el método lu se generan dos sistemas uno triangular inferior y otro triangular superior. Se aplican las rutinas progresivas y regresivas respectivamente

$$L.\underbrace{U.x}_{z} = bp$$

Primero se calcula z y luego x

$$Lz = bp$$

```
>>z=progresiva(L,bp)
  z =
   2
   1
   0
```

Con z calculo x en el sistema triangular superior

$$Ux = z$$

```
>>x=regresiva(U,z)
x =

   0.50000
   0.50000
  -0.00000
```

Para el sistema con los términos independientes correspondientes al ítem b) se procede de la misma manera pero ya se tiene calculadas L,U y P. Luego será

```
>>bb=[5;3;1]

bb =

  5

  3

  1
```

```
>> bbp=P*bb

bbp =

   1

   3

   5
```

Luego se calculan z y x

```
>>z=progresiva(L,bbp)

z =

   1.0000

   3.5000

   4.5000

>>x=regresiva(U,z)

x =

  -3.5000

   3.1000

  -1.8000
```

Una forma de saber si se trabajó bien es verificar si el valor de x satisface el sistema, o sea si cumple $A * x = bb$

```
A*x

ans =

   5.0000

   3.0000

   1.0000
```

En efecto si verifica el sistema

MÉTODO QR

Cualquier matriz A con columnas linealmente independientes puede factorizarse en un producto

$$A = QR$$

Las columnas de Q son ortonormales y R es triangular superior e invertible.

Si la matriz original A es cuadrada también lo son los factores $Q\ y\ R$ y entonces Q será una matriz ortonormal. aplicando esta descomposición matricial en la resolución de sistemas lineales se tiene:

Sea el sistema lineal cuadrado $Ax = b$, cuadrado cuya matriz de coeficientes A es de rango lleno o sea todas sus columnas linealmente independientes, se puede expresar dicha matriz como el producto de una matriz ortonormal por una triangular superior obteniendo lo siguiente:

$$Ax = b$$

$$QRx = b \qquad (1)$$

Por ser Q ortogonal se cumple que $Q^T = Q^{-1}$ Entonces premultiplicando a ambos miembros (1) por la inversa de Q, se obtiene:

$$\underbrace{Q^T Q}_{I} Rx = Q^T b$$

Luego se obtiene un sistema triangular superior:

$$Rx = Q^T b$$

Cuya solución se realiza por el algoritmo de sustitución regresiva

En Matlab es muy sencillo de hacer ya que tiene programado la descomposición QR mediante el comando **qr.** El cual se aplica de la siguiente manera:

Dados el sistema lineal $Ax = b$ se cargan la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes . Luego se procede a calcular Q y R

```
>> [Q R]=qr(A);

>> b1=Q'b;

>> x=regresiva(R,b1)
```

Sistemas Mal Condicionado

Sea el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0.9x + 1.1y = 1.1 \end{cases}$$

La solución del sistema es la intersección de las dos rectas en el punto $x = [0\ 1]$

Si se decide redondear los coeficientes del sistema el error en cada coeficiente sería ± 0.1 lo cual hace pensar que la solución sería con un error del mismo tipo. Veamos que sistema queda

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Observamos que resulta un sistema que tiene dos ecuaciones iguales, lo que significa que son dos rectas coincidentes, o sea infinitas soluciones. Esto indica que el sistema no es bien condicionado

Lo adecuado de una solución depende de la condición de un sistema

*"Los sistemas **bien condicionados** son aquellos en los que un pequeño cambio en uno o más de sus coeficientes provoca un cambio similar en la solución del sistema"*

Lo ideal es cuando las filas de la matriz asociada al sistema son perpendiculares.

*"Los sistemas **mal condicionados** son aquellos en donde pequeños cambios en los coeficientes generan grandes cambios en la solución"*

Debido a que los errores de redondeo pueden inducir pequeños cambios enm los coeficientes, estos cambios pueden generar grandes errores en la solución para sistemas mal condicionados. De allí que cuando se trabajan con datos experimentales, donde los coeficientes surgen de mediciones es importante chequear la condición del sistema para saber si la solución obtenida es confiable.

Para ello está la propiedad de condición de una matriz cuya forma de calcularla es

$$con(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \ = \begin{cases} = 1\ el\ sistema\ es\ Bien\ condicionado \\ \gg 1\ el\ sistema\ es\ Mal\ condicionado \end{cases}$$

Sistema bien condicionado $\Leftrightarrow$ rectas ortogonales $\Leftrightarrow$ cond(A)=1

Sistema mal condicionado $\Leftrightarrow$ rectas ortogonales $\Leftrightarrow$ cond(A)>>1