Universidad Nacional de San Juan Facultad de Ingeniería

MÉTODOS NUMÉRICOS

Ingeniería CIVIL y ELECTRONICA

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Prof. Beatriz Morales
Profesor Asociado	Ing. Agustina Garcés
Profesor Adjunto	Ing. Marión Castro.
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Pablo Marcuzzi
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Germán Rodrigue

Año 2021

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La aplicación de métodos numéricos a sistemas de ecuaciones diferenciales, presenta una analogía total al caso visto para resolución de una ecuación diferencial de primer orden.

La solución de un Sistema de n-E.D.O. de primer orden es el conjunto de n-Funciones que contienen n-Constantes arbitrarias y que reemplazadas en el sistema transforman cada ecuación diferencial en una identidad. Se necesitan n- condiciones para calcular las constantes arbitrarias

Los métodos numéricos vistos aplicados a problemas de valor inicial también se aplican en Sistemas de E.D.O. de primer orden, lo único que cambia es que tendremos n- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias expresadas en forma explícita , junto a n-condiciones iniciales de cada una de las funciones incógnitas.

El problema de valor inicial consiste en un sistemas de n- ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) de primer orden expresada cada derivada en forma explícita y además las n-condiciones iniciales de las funciones incógnitas expresado por:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$

La solución del problema serán n-Funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ que reemplazadas en el sistema, cada ecuación se transforma en una identidad.

Para trabajar con los programas de Octave o Matlab se procede a transformar el sistema dado en forma escalar a una forma vectorial

1. Paso: Se escribe el problema de valor inicial en forma vectorial

$$dy = \begin{bmatrix} f_1(x, yvec) \\ f_2(x, yvec) \\ \dots\dots\dots\dots. \\ f_n(x, yvec) \end{bmatrix} \qquad y0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dots.. \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

2. Paso construir el vector que tiene por componentes el valor inicial y el valor final en x

$$I = [x_0 \quad x_f]$$

3. Paso uso de los programes **ode23** u **ode45** según convenga de la siguiente forma

$$[\boldsymbol{xs}\ \ \boldsymbol{ys}] = ode23(dy, I, y0)$$

Siendo:

- ***xs*** : es el vector del dominio que genera el programa tal que su primer elemento es x_0 y el último elemento es x_f

$$xs = \left.\begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdots \\ x_f \end{matrix}\right\} m\ valores\ de\ x$$

- ***ys*** : es una matriz donde las columnas son los vectores de las funciones soluciones evaluadas en los valores de x

$$\boldsymbol{ys} = \left.\begin{matrix}\underbrace{\begin{bmatrix} y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0} \\ y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1m} & y_{2m} & \cdots & y_{nm} \end{bmatrix}}_{n-\boldsymbol{funciones}}\end{matrix}\right\} m+1\ comp.de\ x$$

Ejemplo 1

Hallar la solución en forma numérica del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y' + xz = e^{-x} \\ y + z' = e^{-x}(x-1) \end{cases} \qquad \begin{matrix} y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{matrix} \qquad I = [0\ 2]$$

Para resolverlo por Octave se construye el vector de funciones incógnitas y el vector de funciones derivadas

1. Las funciones desconocidas expresadas en forma vectorial son

   $y(t) = y_1(t)$ es la primera componente luego lo expreso así y = y(1)

   $z(t) = y_2(\mathrm{t})$ es la segunda componente del vector función luego z = y(2)

   Luego expresado en forma vectorial queda así

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad x{:}\,Variable\ Independiente$$

2. Para construir el vector de las funciones derivadas se deben explicitar cada una de ellas y luego expresarlas con la nueva notación.

$$\begin{cases} y' + xz = e^{-x} \\ y + z' = e^{-x}(x-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = e^{-x} - xz \\ z' = e^{-x}(x-1) - y \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = e^{-x} - x.y(2) \\ f_2 = e^{-x}(x-1) - y(1) \end{cases}$$

$$dy=\begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-x}-x.y(2) \\ e^{-x}(x-1)-y(1) \end{bmatrix}$$

3. Se define en la ventana de trabajo de Octave el vector vertical de las funciones derivadas o sea dy con notación de Octave

   >>dy=@(x,y)   [exp(-x)-x.*y(2);exp(-x).*(x-1)-y(1)]

   >>% el vector de condiciones iniciales

   >> y0=[0;1]

   >> % el vector de trabajo dados por el valor inicial y el valor final para la variable

   >>independiente x

   >>I=[0 2]

   >> ahora el programa ode23 (ode45)

   >> [xs ys]=ode23(dy,I,y0)

   El resultado será

   - el vector xs que tendrá xs(1)=x0   xs(n)=xf
   - La matriz ys tiene dos columnas la primera será la función y(x) y la segunda z(x)

   >>[xs ys]=ode23(dy,I,y0)

   xs

   0

   0.0178

   0.0445

   0.0845

   0.1445

   0.2300

   0.3353

   0.4581

   0.5975

   0.7532

   0.9255

   1.1151

   1.3151

   1.5151

   1.7151

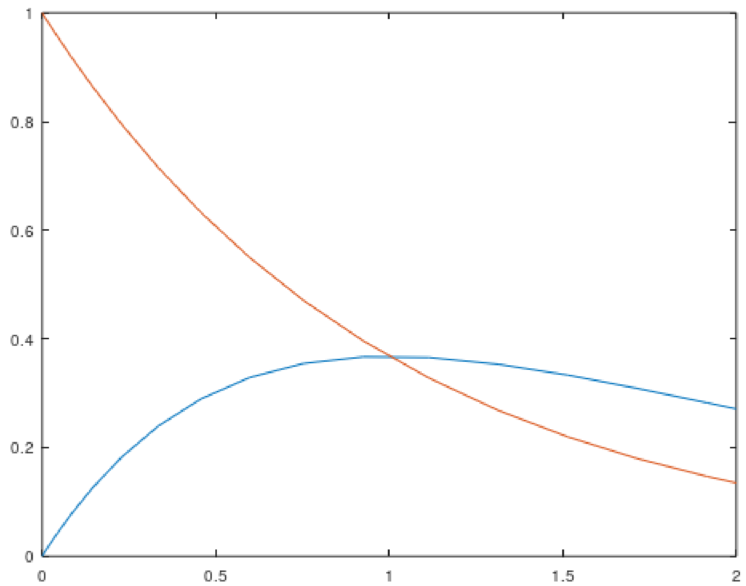
   1.9151

   2.0000

ys=

0	1.0000
0.0175	0.9824
0.0425	0.9565
0.0776	0.9190
0.1250	0.8655
0.1827	0.7946
0.2398	0.7151
0.2897	0.6325
0.3287	0.5502
0.3547	0.4708
0.3669	0.3963
0.3657	0.3278
0.3532	0.2683
0.3332	0.2196
0.3089	0.1797
0.2826	0.1469
0.2712	0.1349
$y(x)$	$z\ (x)$

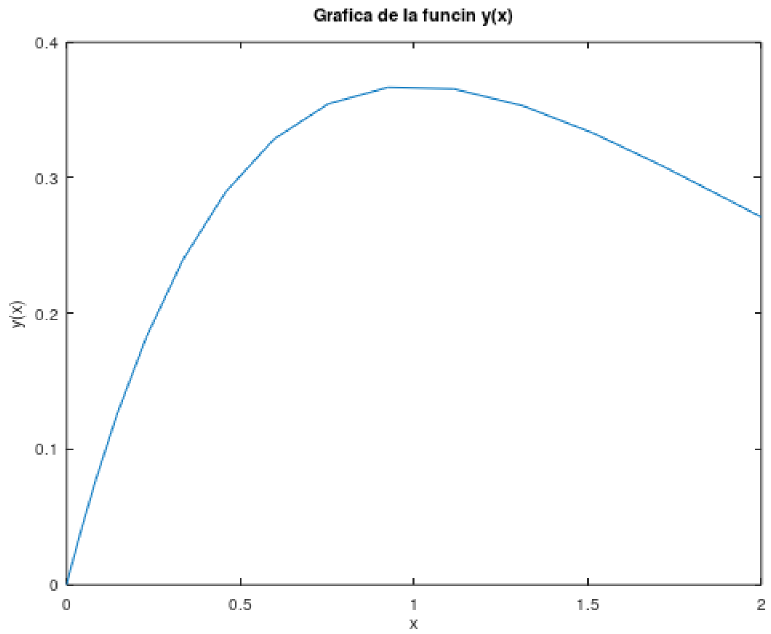
```
>>plot(xs,ys)
```



La función ***y(x)*** es la curva azul porque comienza en 0 , cumple la C.I. y(0)=0 y la otra curva es ***z (x)*** es la otra que cumple z(0)=1

Si quiero graficar solamente una de las funciones por ejemplo la y(x) se usa la primera columna de ys luego se escribe así

```
>>plot(xs,ys(:,1))
```



RESOLUCIÓN DE E.D.de Orden n

Se puede resolver una E.D.O. de orden n en forma numérica aplicando una sustitución de tal forma que transforma la E.D.O. de orden "n" en un sistema de n- ecuaciones diferenciales de primer orden

Para ello se procede de la siguiente manera: dada la E. D. O. de orden n y sus n- condiciones iniciales

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \quad +a_n(x)y = f(x)$$
$$y(x_0) = y_{10}$$
$$y'(x_0) = y_{20}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)0}$$

Se realiza la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} y_1 &= y(x) \\ y_2 &= y'(x) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ y_n &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned} \qquad (1)$$

Que es lo mismo que decir en lenguaje de programación

$$
\begin{aligned}
y(1) &= y(x) \\
y(2) &= y'(x) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots.. \qquad (2) \\
y(n) &= y^{(n-1)}(x)
\end{aligned}
$$

Formando de esta manera el vector **y** cuyas componentes son las funciones desconocidas

$$y = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \dots\dots. \\ y^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots\dots. \\ y_{(n-1}(x) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

El vector y0 estará formado por las condiciones iniciales dadas como datos

$$y0 = \begin{bmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \dots\dots. \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \dots\dots. \\ y_{(n-1}(x_0) \end{bmatrix}$$

Y el vector derivado se obtiene derivando cada una de las componente del vector "**y**" definido en (3), y considerando la sustitución dada en (1) y (2)

$$dy = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \dots\dots. \\ y^{(n)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dots.. \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ \dots\dots. \\ se\ obtiene\ despejando\ de\ la\ E.D.\, y^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Luego de hacer esta transformación, de la ecuación diferencial en un sistema de n- ecuaciones diferenciales (llamadas en física Ecuaciones de Estado) se procede igual que para sistemas de E.D.O. de primer orden

Ejemplo 2 Resolver la siguiente ecuación diferencial con las condiciones iniciales dadas

$$\begin{cases} y''' + xy'' + x^2y = sen(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \qquad I = [0\ 2]$$

1. Construir el vector de funciones desconocidas , para ello se realizan las siguiente sustituciones según (3)

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y(x) \\
y_2 &= y'(x) \\
y_3 &= y''(x)
\end{aligned}
\qquad y = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{bmatrix}
$$

2. Construir el vector derivado **dy** cuyas componentes son las derivadas de cada una de las componentes del vector y. según (4)

$$dy = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ ? \end{bmatrix}$$

   La componente tercera del vector dy es la derivada tercera de la función y(x) y se tiene como dato de la E.D. dada. En efecto despejamos de la ecuación diferencial obteniendo

$$y''' = sen(x) - xy'' - x^2 y$$

   Que expresada en las nuevas variables esto será:

$$y''' = sen(x) - xy(3) - x^2 y(1)$$

   Luego el vector dy queda expresado solamente en términos de las componentes del vector y

$$dy = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ sen(x) - xy(3) - x^2 y(1) \end{bmatrix}$$

3. En la ventana de comando de Octave se cargan el vector derivado (vertical), el vector de las condiciones iniciales, y el vector de trabajo formado por el valor inicial y el valor final. O sea

```
>>dy=@(x,y)    [y(2); y(3); sen(x) - x.* y(3) - x.^2.* y(1)]
>>I=[0 2];
>>y0=[1;2;-1]
>> [xs ys]=ode23(dy,I,y0);
>>plot(xs,ys)
```

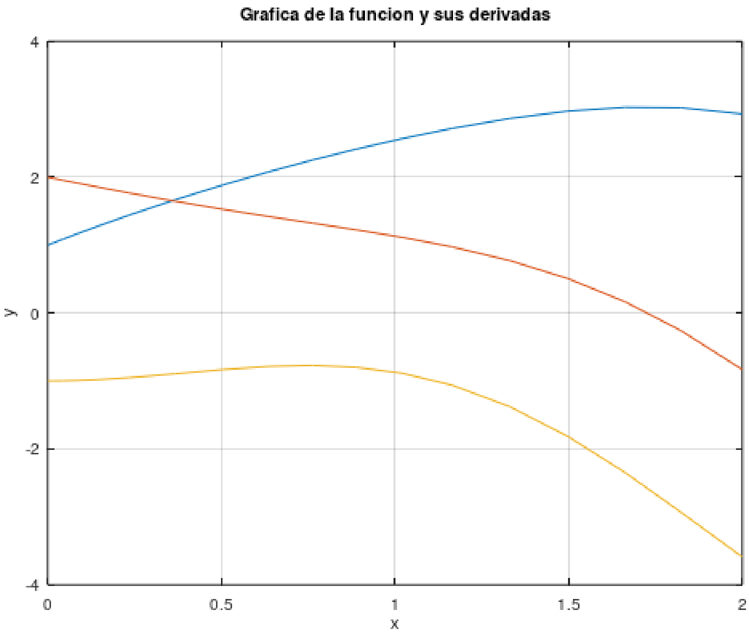


Figura2

- El vector xs contiene los valores del dominio que generó ode23 iniciando en x_0 y finalizando en x_f
- La matriz ys contiene n- columnas y length(x) filas
- >> xs

  xs =
  0
  0.0178
  0.0445
  0.0845
  0.1445
  0.2345
  0.3673
  0.5046
  0.6363
  0.7635
  0.8894
  1.0201
  1.1642
  1.3306
  1.4979
  1.6616
  1.8225
  1.9918
  2.0000

- La matriz ys es:

1.0000	2.0000	-1.0000
1.0354	1.9822	-0.9997

y	y'	y''
1.0879	1.9556	-0.9981
1.1654	1.9157	-0.9931
1.2786	1.8565	-0.9805
1.4418	1.7694	-0.9516
1.6685	1.6467	-0.8946
1.8863	1.5283	-0.8322
2.0806	1.4219	-0.7863
2.2551	1.3232	-0.7712
2.4156	1.2249	-0.7990
2.5687	1.1155	-0.8856
2.7198	0.9760	-1.0615
2.8663	0.7746	-1.3776
2.9749	0.5088	-1.8160
3.0317	0.1690	-2.3451
3.0261	-0.2552	-2.9298
2.9379	-0.8054	-3.5615
2.9312	-0.8346	-3.5912