Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MÉTODOS NUMÉRICOS

Ingeniería Civil
Ingeniería Electrónica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Prof. Beatriz Morales
Profesor Asociado	Ing. Agustina Garcés
Profesor Adjunto	Ing. Marión Castro.
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Pablo Marcuzzi
Jefe de Trabajos Prácticos	Germán Rodriguez

Año 2021

Facultad de Ingeniería UNSJ-2021

Tema

INTEGRALES

Dentro del campo analítico, perteneciente a la matemática pura, se desconoce la primitiva de la mayor parte de las funciones que ella estudia o si ésta se conoce, su aplicación es larga y compleja, para utilizarla con provecho en la resolución de una integral. Incluso, es posible que se desconozca la expresión analítica de la función sobre la cual se desea integrar. Consecuentemente, y en términos generales, es posible asegurar que la gran mayoría de los problemas que se presentan en la práctica, carecen de solución dentro del campo analítico.

Cuando no se conoce ninguna primitiva de la función, resulta necesario apelar a métodos de cálculo aproximados. Igual proceder debe adoptarse si, aun conociéndose una primitiva, resulta poco práctico aplicarla, por su complejidad. De esto surge la aplicación de Métodos numéricos para conocer los valores de esas integrales.

Se trata de evaluar la integral definida de una función mediante una sumatoria de valores de esa función en ciertos puntos llamados nodos, multiplicados por unos coeficientes de ponderación llamados pesos

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \ldots + w_n f_n \qquad (1)$$

Donde $f_i = f_i(x_i)$

Esta expresión implica la sustitución de un sumatorio infinito (la integral) por un sumatorio finito, por lo que se producirá un error de truncamiento.

Matemáticamente, la integración de un área se representa por:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (2)$$

Sabemos que una función puede aproximarse por un polinomio aplicando Taylor, cometiendo un cierto error:

$f(x) = P_n(x) + e(x)$ (3) ; donde *e(x)* es el error

Por lo tanto la Integral de una función podría encontrase como:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b P_n(x)\, dx + \int_a^b e(x)\, dx \qquad (4)$$

Los métodos numéricos que se pueden aplicar para resolver Integrales, entre otros, son los siguientes, de acuerdo a si los intervalos son regularmente o no regularmente espaciados.

$$INTERVALOS \quad REGULARMENTE \quad ESPACIADOS \begin{cases} *\ TRAPECIO \\ \\ *\ SIMPSON \end{cases}$$

$$INTERVALOS \quad NO\ IGUALMENTE \quad ESPACIADOS \begin{cases} METODOS \\ GAUSIANOS \end{cases}$$

En el caso de nuestro cursado, solo veremos los métodos de Trapecio y Simpson, lo cuales son usados para Intervalos regularmente espaciados. Luego con algunas aplicaciones de comandos lograremos resolver aquellos arreglos no regularmente espaciados usando algunos cálculos numéricos. No aplicaremos métodos gaussianos en este cursado.

Fórmulas cerradas de Newton-Cotes

Las fórmulas de Newton-Cotes son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio que es fácil de integrar.

La regla del Trapecio y el método de Simpson 1/3 son algunas de las fórmulas cerradas de Newton-Cotes. En este curso nos centraremos solo en estos dos Métodos para la resolución de cálculo numérico integral.

LA REGLA DEL TRAPECIO 1/3

En análisis numérico la regla del trapecio es un método de integración, es decir, un método para calcular aproximadamente el valor de una integral definida. La regla se basa en aproximar el valor de la integral de la función lineal.

La regla del trapecio es la primera de las fórmulas cerradas de integración de Newton-Cotes. Como ya se dijo, corresponde a la integración con un polinomio de primer grado:

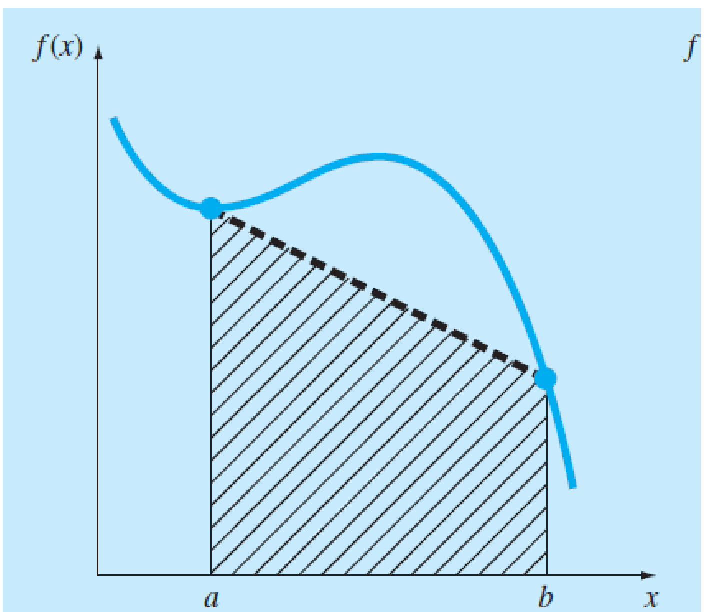


Fig. 1

Para poder encontrar el área bajo la curva, o integral, trazamos una secante entre los puntos extremos donde se desea integrar, o sea entre a y b. Con esto:

- Se linealiza el problema
- Se encuentra el área bajo la curva con el trapecio

La curva se reemplaza por la recta de interpolación que pasa por los extremos del intervalo (a y b), y el área bajo la curva se aproxima por el área bajo la recta encontrada.

$$A = \frac{(b+B)}{2}h \qquad (5)$$

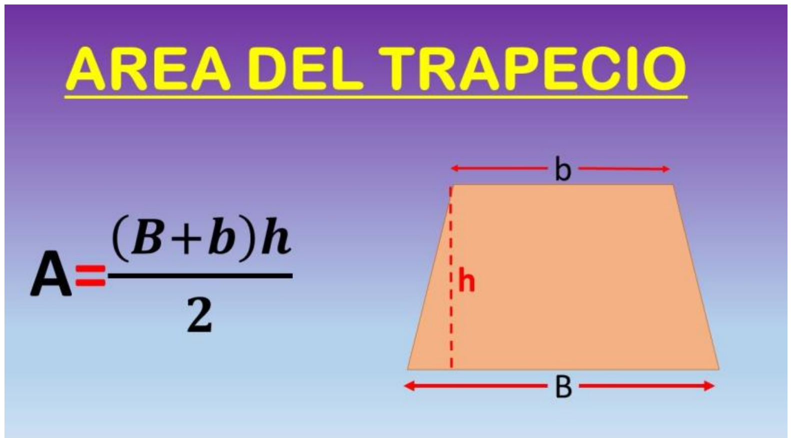


Fig. 2

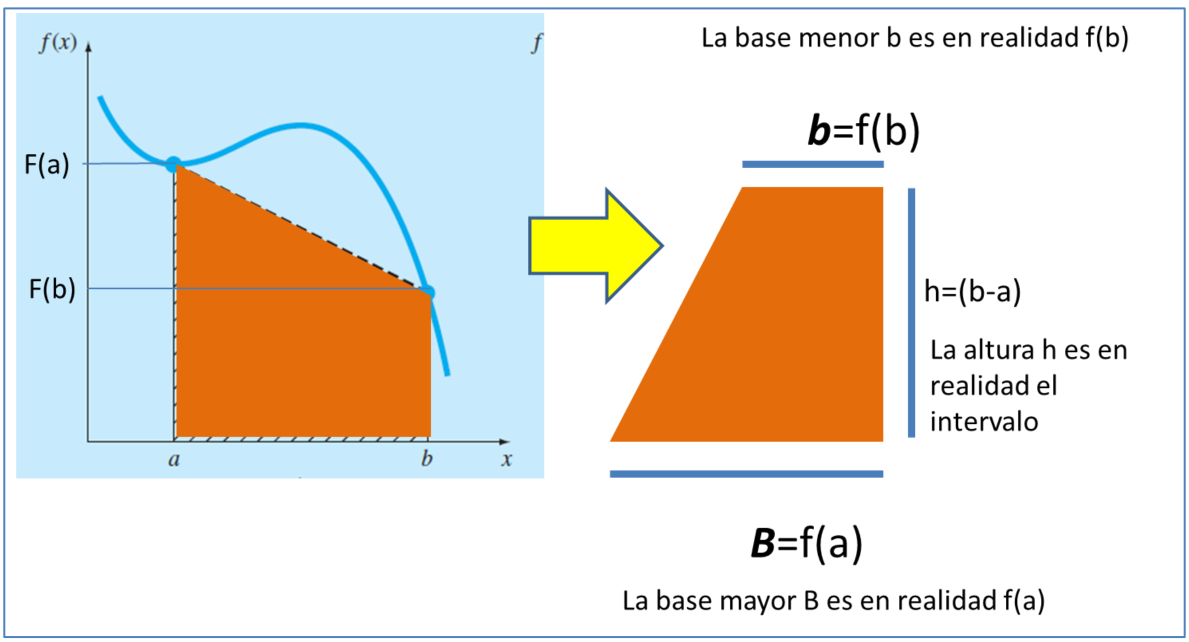


Fig. 3

$$A = \frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{B})}{2}\,h \; = \; \frac{h}{2}\,(\mathbf{b}+\mathbf{B}) = \frac{(b-a)}{2}\,(\mathrm{f(b)+f(a)}) \qquad (6)$$

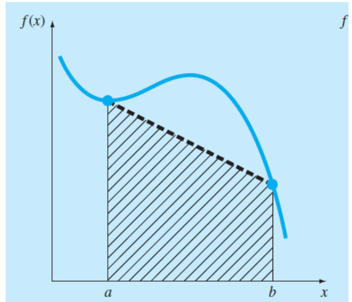


Fig. 4

$$I \cong \frac{(b-a)}{2}\,(f(b)+f(a)) \qquad (7)$$

El margen de error que se comete al aplicar este método se puede ver reflejado en las gráficas. Si nosotros deseamos reducir ese error, deberíamos tomar trapecios más chicos y sumarlos. Esto es tomar varios puntos para unir las bases del trapecio, o sea varios puntos entre a y b. En la siguiente gráfica se puede observar como al tomar más puntos entre a y b, las rectas de interpolación están más cerca de las curvas (función), en cada intervalo, por eso el error disminuye.

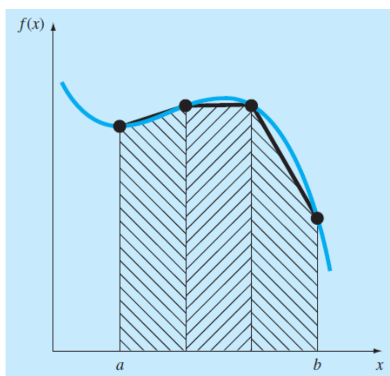


Fig. 5

Luego en cada subintervalo aplico la fórmula del trapecio. Aplico en cada subintervalo la recta secante y formo varios trapecios. Gráficamente se ve en la fig. 5 como disminuye el error.

<u>Metodología</u>

Una forma de mejorar la precisión de la regla del trapecio consiste en dividir el intervalo de integración de ***a*** hasta ***b*** en varios segmentos, y aplicar el método a cada uno de los trapecios que quedan determinados.

Las áreas de los trapecios se suman después para obtener la integral en todo el intervalo.

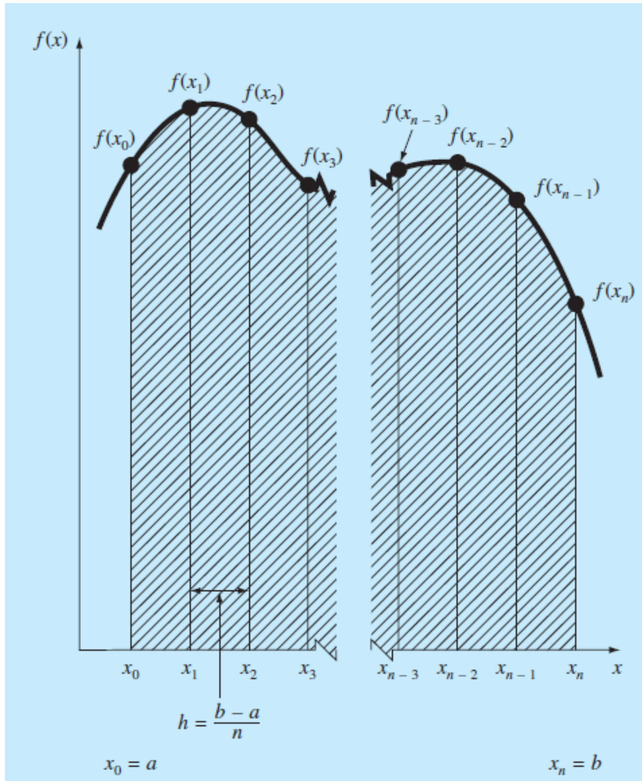


Fig. 6

Existen n segmentos del mismo ancho(x_0, x_1, x_2,..., x_n).

En consecuencia, hay $n + 1$ puntos igualmente espaciados

Luego:

$h = \frac{b-a}{n}$; (8) con n = cantidad de puntos menos 1, o cantidad de segmentos

Si los x empiezan a contarse en 1, o sea x_1, llegaremos a x_{n+1}, teniendo n puntos. Si los puntos comienzan a contarse como x_0, llegaran a x_n siendo $n+1$ puntos. **Tener en cuenta esto para el cálculo de *h* en la fórmula.**

Si a y b se designan como x_0 y x_n, respectivamente, la integral completa se representará como:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \qquad (9)$$

Sustituyendo la regla del trapecio en cada integral se obtiene

$$I \cong \frac{h}{2}\,(f(x_0)+f(x_1)) + \frac{h}{2}\,(f(x_1)+f(x_2)) + \frac{h}{2}\,(f(x_2)+f(x_3)) + \ldots + \frac{h}{2}\,(f(x_{n-1})+f(x_n)) \qquad (10)$$

Coloco como factor común *h/2*

$$I \cong \frac{h}{2}\ [\mathrm{f}(x_0)+\mathrm{f}(x_1)+\mathrm{f}(x_1)+\mathrm{f}(x_2)+\mathrm{f}(x_2)+\mathrm{f}(x_3)+\ldots+\mathrm{f}(x_{n-1})+\mathrm{f}(x_n)] \qquad (11)$$

En esta fórmula se puede ver que se repiten dos veces los términos $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_{n-1})$. En cambio los términos $f(x_0)$ y $f(x_n)$ (de los extremos) solo aparecen una vez.

Por lo tanto podríamos escribir la fórmula de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathrm{I} \cong \frac{h}{2}\ [\mathrm{f}(x_0)+\mathrm{f}(x_n)+2\sum_{i=2}^{n-1}\mathrm{f}(x_i)]} \qquad (12)$$

Con h=(b-a)/n.

El valor de h se calcula como el valor extremo menos el primer valor, dividido en la cantidad de segmentos

<u>Error que se comete al Integrar con la Regla del trapecio</u>

La fórmula de los trapecios tiene una precisión suficientemente buena cuando se trata de aplicarla a determinaciones que no requieran una aproximación de orden elevado. Cuando empleamos la integral bajo un segmento de línea recta para aproximar la integral bajo una curva, obviamente se tiene un error que puede ser importante dependiendo de la forma gráfica de la función.

$$err = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta) \qquad (13)$$

donde ξ está en algún lugar en el intervalo entre *a* y *b*. Este error "*err*" indica que si la función sujeta a integración es lineal, la regla del trapecio será exacta. De otra manera, para funciones con derivadas de segundo orden y de orden superior, puede ocurrir algún error.

También podemos observar que mientras más chico es *h*, o sea la diferencia tomada entre los subintervalos, más chico será el error y más preciso será el cálculo de la integral.

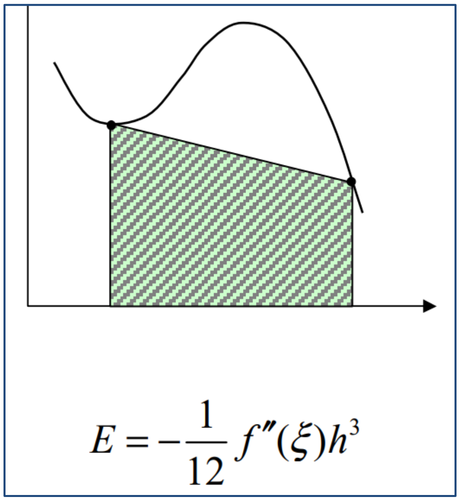


Fig. 7

<u>Ejemplo de cálculo con la Fórmula de trapecio</u>

Sea la función f(x)=sen (x), calcular la Integral entre 0 y pi/2:

$$I = \int_0^{pi/2} sen(x) = -\cos(x)\,|_0^{pi/2} = -\cos\left(\frac{pi}{2}\right) + \cos(0) = 1$$

Se puede observar la Integral en la fig. 8.

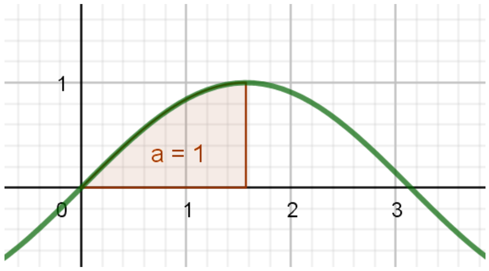


Fig. 8

Ahora aplicaremos la Formula del trapecio para calcular esa Integral. Empezamos con un h=pi/2; con un solo intervalo

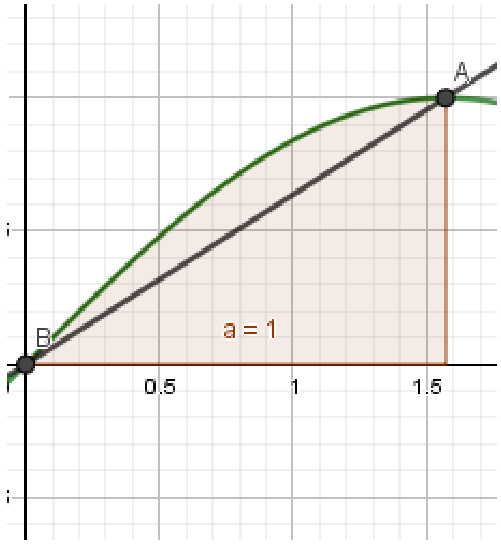


Fig. 9

I$\cong \frac{\pi}{4}$ [f(0)+f($\pi/2$)]

I$\cong \frac{\pi}{4}$ [sen(0)+ sen($\pi/2$)]= $\frac{\pi}{4}(1) \cong 0{,}785$

Ahora supongamos intervalos mas chicos h=pi/4

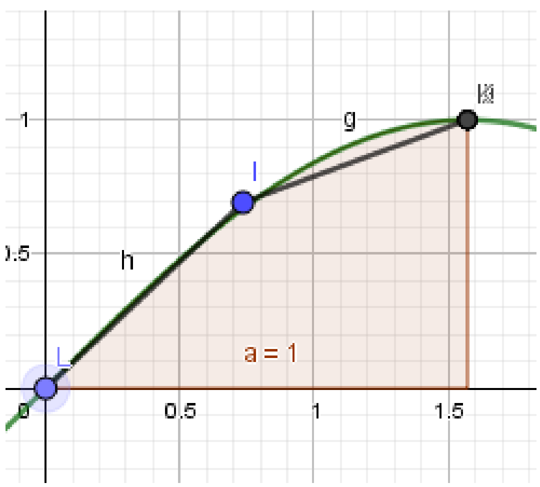


Fig. 10

I$\cong \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2}$[f(0)+f($\pi/2$)+2 f($\pi/4$)]

I$\cong \frac{\pi}{8}$ [sen(0)+ sen($\pi/2$)+ 2 sen($\pi/4$)]= $\frac{\pi}{8}\left(1+2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong \frac{\pi}{8}\left(1+\sqrt{2}\right) \cong 0{,}948$

A medida que h disminuye, el cálculo se aproxima cada vez más al valor real de la Integral

Ejemplo en Octave o Matlab :

Ejemplo para f(x)=sen (x), entre 0 y pi /2

```
%Primero deben dar el valor de n y los extremos del intervalo, o sea a y b (por ejemplo 13puntos)
>>a=0
>>b=pi/2
>>n=13; % en este caso se da n como dato, pero también se puede dar como dato h (ver guía)
% calculamos h
>>h=(b-a)/(n-1)

%Luego se genera el vector x con esos datos cargados
>>x=a:h:b;
%Luego cargar las funciones como un vector en función de x
>>y=sin(x);
%Para la regla del trapecio.
%Formula


>>It=h/2*(y(1)+y(n)+2*(sum(y(2:n-1))))
```

Para el caso de datos no regularmente espaciados

Si los datos no están regularmente espaciados se puede aplicar la Regla del trapecio a cada subintervalos y sumar todos los resultados, esto sería:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)[f(x_{i+1}) + f(x_i)] \qquad (14)$$

De esta manera se suman todos los trapecios formados.

Ejemplo en Octave o Matlab :

```
%En Matlab, si tengo un arreglo de valores por ejemplo:

>>x= [-1; -0.5; 0;0.5;1]

>>x=x(:);

>>y=y(:);

>>n=lenht(x);  %Si no están ordenados, los ordeno con el comando sor

>>(xord xi)=sort (x) ;  %Puedo encontrar el h como:

>>d=diff(xord)';

>>S=y(1:n-1)+y(2:n);

>>AT=1/2*d*S; % para fórmula de trapecio
```

LA REGLA DE SIMPSON 1/3

Basado en la utilización de parábola para aproximar los arcos de curva, en lugar de emplear segmentos de recta como en el método anterior; es decir utilizar curvas en lugar de una poligonal, se obtiene una mayor precisión en el cálculo de integrales definidas.

Para calcular las Integrales también se pueden usar polinomios de grado superior para unir los puntos. Por ejemplo, si hay otro punto a la mitad entre *f(a)* y *f(b),* los tres puntos se pueden unir con una parábola. Si hay dos puntos igualmente espaciados entre *f(a)* y *f(b),* los cuatro puntos se pueden unir mediante un polinomio de tercer grado. Las fórmulas que resultan de tomar las integrales bajo esos polinomios se conocen como reglas de Simpson.

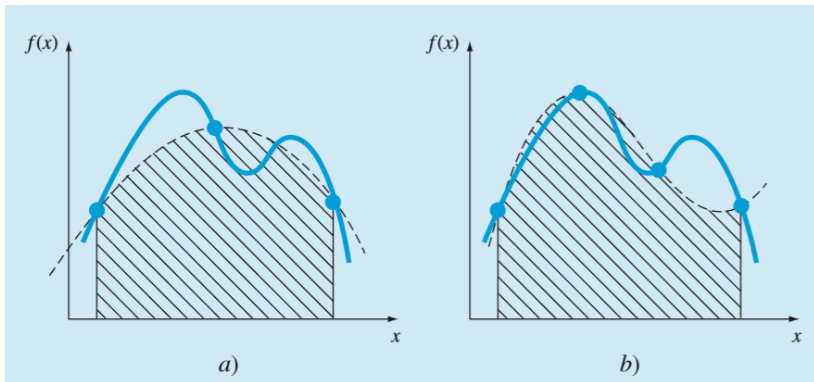


Fig. 11

Aclaración: el método de Simpson 1/3 se puede emplear **sólo si el número de puntos es impar.**

Supongamos la aproximación de la Integral de la función *f(x),* como la integral de un polinomio P_2, entre los valores a y b

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_2(x)\,dx \qquad (15)$$

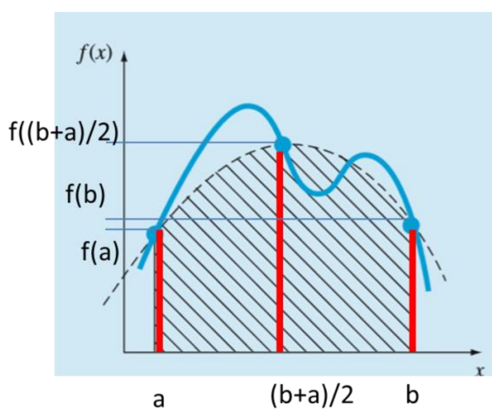


Fig. 12

En la Figura 12 se ve como el polinomio y la función coinciden en los puntos a, b y (a+b)/2.

El Polinomio P_2 de Segundo grado se expresa de la siguiente manera:

$$P_2(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{16}$$

La función reemplazada en los puntos *a* y *b*, puede también expresarse como el polinomio reemplazado en los puntos *a* y *b*:

$$f(a) = P_2(a) = Aa^2 + Ba + C \tag{17}$$

$$f(b) = P_2(b) = Ab^2 + Bb + C \tag{18}$$

De igual manera la función reemplazada en un punto intermedio entre *a* y *b*, puede también expresarse como el polinomio reemplazado en dicho punto:

$$f\left(\frac{(b+a)}{2}\right) = P_2\left(\frac{(b+a)}{2}\right) = A\left(\frac{(b+a)}{2}\right)^2 + B\left(\frac{(b+a)}{2}\right) + C \tag{19}$$

Ahora reemplazamos *(15)* por la expresión del polinomio de segundo grado de *(16)*

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_2(x)\,dx = \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx \tag{20}$$

Resolvemos la integral y nos queda la expresión en (21) y luego aplicamos Barrow para llegar a (22):

$$I = \frac{Ax^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\Big|_a^b \tag{21}$$

$$I = \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + B\frac{(b^2 - a^2)}{2} + C(b - a) \tag{22}$$

Resolvemos la diferencia de cubos y la diferencia de cuadrados:

$$I = \frac{A(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3} + B\frac{(b-a)(b+a)}{2} + C(b - a) \tag{23}$$

Podemos sacar factor común de *(b-a)/6* y juntar las expresiones comunes a *A B* y *C*:

$$I = \frac{(b-a)}{6}[2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(b + a) + 6C] \tag{24}$$

$$I = \frac{(b-a)}{6}[2Ab^2 + 2Aab + 2Aa^2 + 3Bb + 3Ba + 6C] \tag{25}$$

Operando matemáticamente, llegamos a la siguiente expresión *(26):*

$$I = \frac{(b-a)}{6}[(Aa^2 + Ba + C) + (Ab^2 + Bb + C) + Ab^2 + 2Aab + Aa^2 + 2Bb + 2Ba + 4C] \quad (26)$$

Si observamos en *(26),* el término coloreado en amarillo corresponde al polinomio *P(a)* que aproxima a *f(a)* dado en la expresión *(17),* y el término coloreado en verde corresponde al polinomio *P(b)* que aproxima a *f(b)* dado en la expresión *(18).* Por lo tanto reemplazamos estos términos por *f(a)* y *f(b)* respectivamente

Además podemos sacar factor común de A, B y C en los demás términos:

$$I = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + f(b) + A(b^2 + 2ab + a^2) + B(\,2b + 2a) + 4C\right] \qquad (27)$$

$$I = \frac{(b-a)}{6}[f(a) + f(b) + A(b + a)^2 + 2B(b + a) + 4C] \qquad (28)$$

$$I = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + f(b) + 4\left(A\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{b+a}{2}\right) + C\right)\right] \qquad (29)$$

Si observamos en *(29),* el término coloreado en celeste corresponde al polinomio $P_2\left(\frac{(b+a)}{2}\right)$ que aproxima a $f\left(\frac{(b+a)}{2}\right)$ dado en la expresión *(19)*

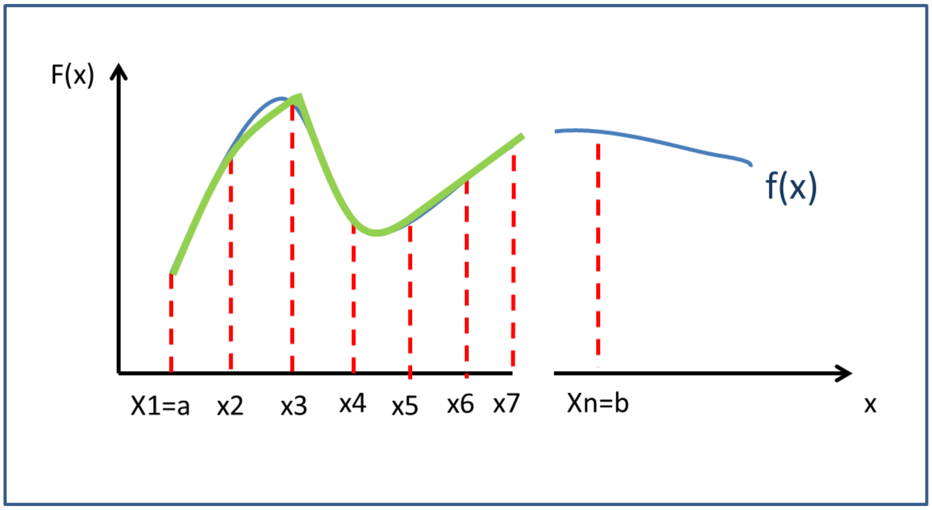
$$I = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right] \qquad (30)$$

La fórmula vista sirve para aproximar la Integral con una parábola, o Polinomio de segundo grado, y tiene la forma expresada en (30):

$$\boxed{I = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right]}$$

La fórmula de Simpson se puede extender para polinomios de tercer o más grados.

Para disminuir el error, podríamos hacer particiones más chicas, ir aproximando por parábolas cada tres puntos y sumar las áreas.



$con \quad 2*h$ =(b-a)

Fig. 13

- El método se puede emplear sólo si el número de segmentos es par o bien un número impar de puntos.
- Intervalos regularmente espaciados

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_3} P_2(x)dx + \int_{x_3}^{x_5} P_2(x)dx + \int_{x_5}^{x_7} P_2(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} P_2(x)dx \qquad (31)$$

Sabiendo que x_3-x_1=$2h$, y h= x_2-x_1,

$$I = \frac{h}{3}[f(x_1)+4f(x_2)+f(x_3)] + \frac{h}{3}[f(x_3)+4f(x_4)+f(x_5)] + \frac{h}{3}[f(x_5)+4f(x_6)+f(x_7)] + \cdots + \frac{h}{3}[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

(32); con 2h/6=h/3

$$y \quad h = \frac{(b-a)}{(n-1)}$$

$$I = \frac{h}{3}\big[y(1)+y(n)+4*sum\big(y(2{:}2{:}n)\big)+2*sum(y(3{:}2{:}n-1))\big] \;| \qquad (33)$$

$$I = \frac{h}{3}[Ex + 4*P + 2*I] \qquad (34) \quad ;con \quad h = \frac{(b-a)}{2}$$

Donde:

Ex : suma de la función en los puntos extremos

P : suma de la función en los puntos pares

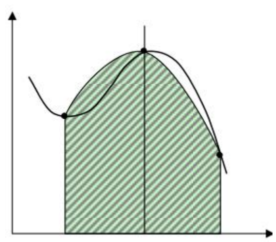
I : suma de la función en los puntos impares

Error que se comete al Integrar con Método de Simpson

Se puede demostrar que la aplicación a un solo segmento de la regla de Simpson 1/3 tiene un error de truncamiento de

$$err = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\zeta)$$

donde ξ está en algún lugar en el intervalo entre *a* y *b*. Así, la regla de Simpson 1/3 es más exacta que la regla del trapecio. En lugar de ser proporcional a la tercera derivada, el error es proporcional a la cuarta derivada. La regla de Simpson 1/3 alcanza una precisión de tercer orden aun cuando se base en sólo tres puntos. En otras palabras, ¡da resultados exactos para polinomios cúbicos aun cuando se obtenga de una parábola!



$$E = -\frac{1}{90} f^{iv}(\xi) h^5$$

Fig. 14

Ejemplo en Matlab:

Ejemplo para f(x)=sen (x), entre 0 y pi /2

```
%Primero deben dar el valor de n y los extremos del intervalo, o sea a y b (por ejemplo 13puntos)
>>a=0
>>b=pi/2
>>n=13; % en este caso se da n como dato, pero  también se puede dar como dato h (ver
```

guía)

% calculamos h

>>h=(b-a)/(n-1)

%Luego se genera el vector x con esos datos cargados

>>x=a:h:b ;

%Luego cargar las funciones como un vector en función de x

>>y=sin(x);

%El método de Simpson.

%Recordar que para Simpson siempre debe ser un número impar de puntos

%Formula

>>E=y(1)+y(n);% suma de la función en los puntos extremos

>>P=sum(y(2:2:n));% suma de la función en los puntos pares

>>I=sum(y(3:2:n-1));% suma de la función en los puntos impares

>>Is=h/3*(E+4*P+2*I)

<u>Si tenemos n par se soluciona de la siguiente manera:</u>

%Se calcula el valor de la integral por Simpson hasta n-1, y último intervalo se ha calculado por Trapecio

>>Af=h/2*(y(n-1)+y(n));% calculo por trapecio el ultimo intervalo que luego sumare al final

>> n=n-1; Se calcula por Simpson hasta n-1, por eso se pasa el valor de n a n-1.

>>E=y(1)+y(n);% suma de la función en los puntos extremos

>>P=sum(y(2:2:n));% suma de la función en los puntos pares

>> I=sum(y(3:2:n-1));% suma de la función en los puntos impares

>>Is=h/3*(E+4*P+2*I);

>> Is2=Is+Af% Para dar solución para el caso de que n sea par;

CALCULO DE LA INTEGRAL EXACTA en Octave

Cargando correctamente la función con el comando handle, y los extremos podemos calcular el valor exacto de la Integral para comparar los resultados obtenidos con las formulas del Trapecio y Simpson.

COMANDOS: **quad, quadl**

Ejemplo para f(x)=sen (x), entre 0 y pi/2 (use este ejemplo para resolver con otras funciones)

```
%Cargamos la función como
>>f=@(x) sin(x); % no como vector
%Damos  el valor de los extremos del intervalo, o sea a y b
>>a=0
>>b=pi/2
>>Integral=quad(f,a,b)
```

Referencias

Chapra S. y Canale R, "Métodos numéricos para Ingenieros".