Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MÉTODOS NUMÉRICOS

Ingeniería Civil
Ingeniería Electrónica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Prof. Beatriz Morales
Profesor Asociado	Ing. Agustina Garcés
Profesor Adjunto	Ing. Marión Castro.
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Pablo Marcuzzi
Jefe de Trabajos Prácticos	Germán Rodriguez

Año 2021

SISTEMAS LINEALES

(Segunda Semana)

SISTEMAS LINEALES SOBREDETERMINADOS

Sea un sistema lineal donde la cantidad de ecuaciones es igual al número de incógnitas expresado en forma matricial

$$A_{n,n}x_{n,1} = b_{n,1}$$

El producto matricial puede expresarse como un producto de un vector fila, por un vector columna $\vec{x}$ Donde el vector fila son las columnas C_i de A

$$A = [C_1 \;\; C_2 \;\; \dots \;\; C_i \dots \;\; C_n]$$

Luego el producto $Ax = b$ puede expresarse como un producto escalar de dos vectores

$$[\vec{C}_1 \;\; \vec{C}_2 \;\; \dots \;\; \vec{C}_i \dots \;\; \vec{C}_n].\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{C}_1x_1 + \vec{C}_2x_2 + \dots + \vec{C}_ix_i + \dots + \vec{C}_nx_n = \vec{b}$$

Esto indica que el vector $\vec{b}$ puede expresarse como combinación lineal de las columnas de A, es decir pertenece al espacio generado por las columnas de A. Y los coeficientes de la combinación lineal son las componentes del vector solución del sistema.

Dado un sistema lineal de m- ecuaciones y n- incógnitas de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad m \gg n$$

O sea un sistema con más ecuaciones que incógnitas el cual expresado en forma matricial queda

$$Ax = b$$

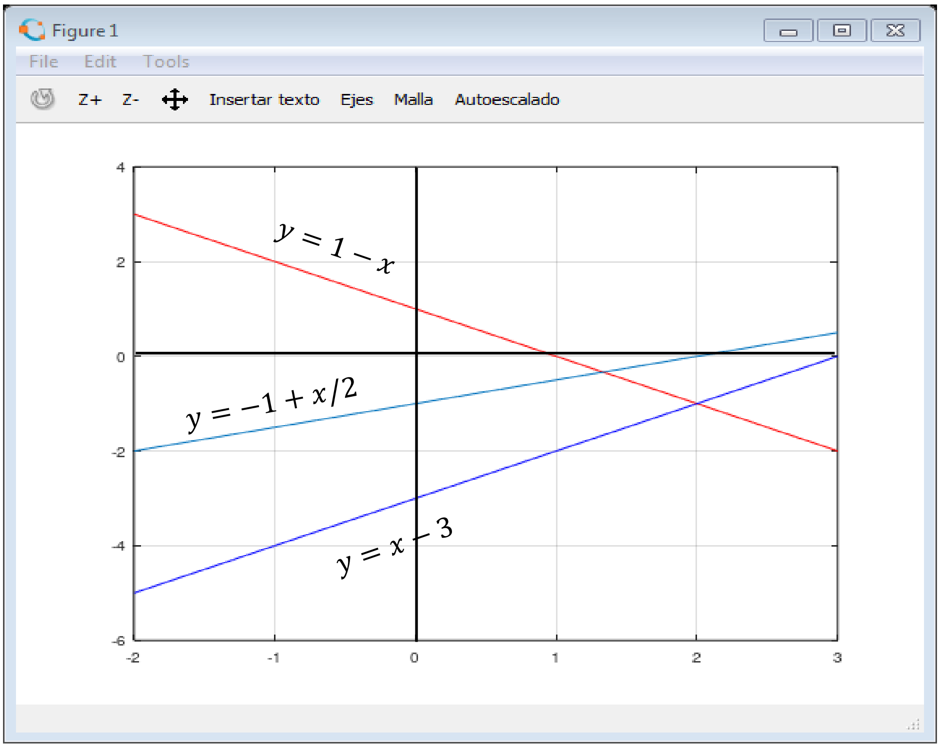
Generalmente los sistemas sobredeterminados no tienen solución.

Ejemplo:

Sea el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$$

Este sistema está compuesto por 3 ecuaciones con dos incógnitas. Su interpretación geométrica sería tres rectas en el plano. Las dos primeras se cortan en el punto $(2,-1)$ pero la tercera recta no pasa por este punto. Esto indica que el sistema no tiene solución



Que el sistema no tenga solución significa que no existe ningún vector x que verifica $Ax = b$. Esto es equivalente a decir que el vector de términos independientes b no pertenece al subespacio generado por las columnas de A puesto que no existe un conjunto de valores x_i que permita expresar al vector b como combinación lineal de las columnas de A.

Partiendo de la base que el sistema no tiene solución, la idea es encontrar un vector x que haga mínimo la norma del error, esto es:

$$Ax \neq b \qquad \forall x$$

$$E = Ax - b \qquad Error\ o\ Residuo$$

$$\|E\| = \|Ax - b\|$$

Se busca el vector $\vec{x}$ de tal manera que hace mínimo el módulo del vector error.

Geométricamente se puede interpretar de la siguiente forma:

Como el vector b no pertenece al subespacio generado por las columnas de A significa que se encuentra en otro subespacio, luego para distintos vectores x se buscará aquel que haga mínimo el error $Ax - b$, o sea que el módulo del vector sea mínimo. Sabemos que la distancia es mínima cuando se toma la dirección perpendicular, luego de todos los x posibles, buscamos el x^* tal que el vector $Ax^* - b$ sea perpendicular al subespacio columna de la matriz A . Dicho vector x^* será la solución buscada. (ver Figura 1)

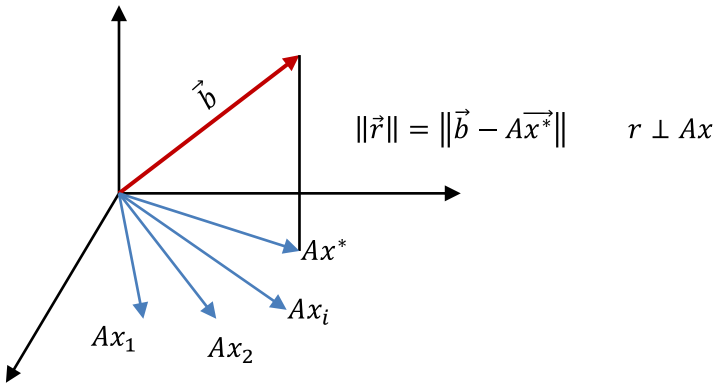


Figura 1

Si el vector $r = Ax^* - b$ es perpendicular a todo el subespacio columna de A , el producto escalar de una vector cualquiera del suspacio columna de A de la forma Ax con el vector $\vec{r}$ debe ser nulo, esto es:

$$(Ax)^T(Ax^* - b) = 0$$

Aplicando propiedades : *la transpuesta de un producto de matrices es el producto de los transpuestos cambiado de orden* , y aplicando distributiva resulta

$$x^T A^T(Ax^* - b) = 0$$

$$x^T \underbrace{(A^T Ax^* - A^T b)}_{\vec{0}} = 0 \qquad \forall x$$

Luego si este producto es nulo para cualquier x significa que el factor entre paréntesis es el vector nulo, luego se obtiene la siguiente expresión :

$$A^T Ax^* - A^T b = 0$$

Obteniendo las *Ecuaciones Normales*

$$\boxed{A^T Ax^* = A^T b}$$

Esto significa que x^* es solución del sistema de Ecuaciones Normales y es el vector que hace mínimo el módulo del error.

El módulo de un vector es la norma dos del vector. (Este concepto lo estudiaremos más adelante). De allí que esta solución es la solución de mínimos cuadrados, porque hace mínimo la norma dos del error.

Observación:

El método de mínimos cuadrados consiste en resolver el ***sistema de ecuaciones normales*** asociado al sistema dado. Dicho sistema es un sistema cuadrado de orden nxn En efecto:

$$\underbrace{A^T{}_{n,m} A_{m,n}}_{EN_{n,n}} x^*{}_{n,1} = \underbrace{A^T{}_{n,m} b_{m,1}}_{bN_{n,1}}$$

El cual por lo general tiene solución única, de tal manera que se resuelve por los métodos vistos anteriormente. La desventaja de este sistema es que es mal condicionado, lo cual su solución no es muy confiable. De ahora en adelante llamaremos x^*como x_{op} ya que la solución por el método de mínimos cuadrados como minimiza el error, se denomina solución óptima en el sentido de los mínimos cuadrados

Ejemplo:

Del sistema dado al principio buscaremos la solución por mínimos cuadrados, o sea x_{op}vector que hace mínimo el error.

Para ello recordemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Se debe resolver el sistema de las ecuaciones normales

$$\underbrace{A' * A}_{EN} * x_{op} = \underbrace{A' * b}_{bN}$$

- Lo primero que se debe hacer es construir las ecuaciones normales. Esto se hace en Octave de la siguiente forma

  Se cargan los datos en la matriz A y b. Luego se calcula la matriz $EN \ y \ bN$

```
>> EN=A'*A;
>>bN=A'*b;
>>xop=EN\bN
xop =


   1.71429
  -0.42857
```

  Se puede calcular el vector residuo y su norma

```
>> r=A*xop-b
r =
   0.28571
  -0.85714
  -0.57143
>> residuo=norm(r)
```

residuo = 1.0690

Si se modifica una milésima la solución seguro que el residuo da mayor.

Por ejemplo

x=[1.71 ;-0.42]; >> r1=A*x-b

r1 =

0.29000

-0.87000

-0.55000

>> residuo1=norm(r1)

residuo1 = 1.0693

Como ven el residuo es mayor al obtenido con x_{op}

SISTEMAS SUBDETERMINADOS

Se denomina sistema subdeterminado cuando el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas, o sea $m < n$ Siendo m la cantidad de ecuaciones y n el número de incógnitas.

Como el rango de la matriz de coeficientes $A_{m,n}$ no puede ser mayor que m, el número de grados de libertad será $gl = n - rank(A)$, por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones.

De todas las soluciones nos va interesar encontrar aquella de menor longitud que se denomina x_{LMS}.

Sabemos que la longitud de un vector está dada por la norma del vector o módulo del vector que se calcula

$$\|\vec{x}\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Por medio de un ejemplo trataremos de hallar la forma en que se calcula x_{LMS}.

Ejemplo

Sea el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

Expresado matricialmente será

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2x1}$$

Supongamos que el rango de la matriz de coeficientes es dos. Luego los grados de libertad del sistema $gl = 3 - 2 = 1$

Tenemos un sistema con infinitas soluciones con un grado de libertad.

Interpretación Geométrica:

Recordando lo estudiado en Geometría se tiene que la ecuación normal del plano cumple

$$ax + by + cz = d \qquad donde \quad (a, b, c)^T \; es\; el\; vector\; Normal\; al\; plano$$

Cada ecuación del sistema geométricamente es un plano, luego tenemos dos planos cuya intersección es una recta, que es la recta solución del sistema.

Luego cada punto de la recta es solución del sistema, y pertenece a ambos planos.

Cada ecuación del sistema es la ecuación normal de un plano o sea :

$$\pi_1:\; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad N_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})^T$$

$$\pi_2:\; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_1 \qquad N_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23})^T$$

Donde se cumple que :

$$N_1 \perp \pi_1 \quad y \quad N_2 \perp \pi_2$$

Recuerden que de todas las soluciones posibles solo me interesa esta vez encontrar la solución de mínima longitud.

Si a cada punto de la recta se le asocia el vector posición correspondiente, (aquél que tiene como origen, el origen de coordenadas, y como extremo el punto de la recta), la solución que busco es aquel vector que tiene mínima longitud. Esto geométricamente significa que el vector x_{LMS} es el punto de la recta que tiene mínima distancia respecto al origen de coordenadas, luego es el vector perpendicular que va del origen a la recta. Luego x_{LMS} es perpendicular a la recta solución del sistema.

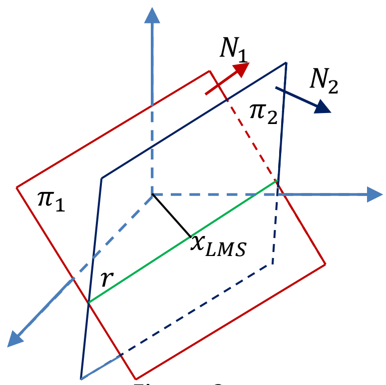


Figura 2

Además como el punto pertenece a cada uno de los planos será perpendicular a cada vector normal correspondiente de cada plano, o sea:

$$x_{LMS} \perp recta$$

$$x_{LMS} \perp \pi_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{LMS} \perp N_1$$

$$x_{LMS} \perp \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{LMS} \perp N_2$$

Los vectores N_1 y N_2 son perpendiculares a la recta, generan un plano perpendicular a la recta que contiene **todos los vectores ortogonales** a la recta, llamado Plano Ortogonal(complemento ortogonal de la recta), por lo tanto x_{LMS} pertenece al plano ortogonal, y puede escribirse como combinación lineal de los vectores N_1 y N_2 de la siguiente manera

$$x_{LMS} = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$$

$$x_{LMS} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} \lambda_2$$

$$x_{LMS} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$x_{LMS} = A^T \lambda \qquad (1)$$

El problema ahora es como calcular el vector λ

Como x_{LMS} es solución del sistema $Ax = b$ debe verificarlo esto es:

$$Ax_{LMS} = b$$

Reemplazando la expresión obtenida de x_{LMS} en (1) se tiene:

$$\underbrace{A_{2x3} {A^T}_{3x2}}_{2x2} \lambda = b$$

Sistema de ecuaciones lineal cuadrado cuya incógnita es λ que si tienen solución y es única, se puede obtener de la forma

$$\lambda = (A.A^T)^{-1} b$$

Reemplazando el valor de λ en la expresión (1) se obtiene

$$\boxed{x_{LMS} = A^T (AA^T)^{-1} b}$$

Esta es la solución de mínima longitud de las infinitas soluciones que tiene el sistema

Ejemplo:

Dado el siguiente sistema:

1. Analizar si tiene solución . Clasifique
2. Hallar el sistema equivalente
3. Hallar la solución de mínima longitud, en caso de ser posible.

$$\begin{cases} 7x - y + 4z = 4 \\ 3x - 8y + 2z = 2 \\ 4x + 7y + 2z = 2 \end{cases}$$

Solución

1) Se cargan los datos y se analiza si tiene solución

```
>>A=[7 -1 4;3 -8 2;4 7 2]
  A =
    7  -1   4
    3  -8   2
    4   7   2
>> rank(A)
    ans =  2
>>b=[4 2 2]'
     b =
       4
       2
       2
>> rank([A b])
       ans =  2
```

Como el rango es dos y el número de incógnitas es 3 tenemos infinitas soluciones con un grado de libertad

2) Como el sistema tiene infinitas soluciones se halla el sistema equivalente aplicando el comando rreef

```
>> format rat
>> sist_equi=rref([A b])
sist_equi =

      1       0     30/53     30/53
      0       1     -2/53     -2/53
      0       0       0         0
```

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x \quad + \dfrac{30}{53}z = \dfrac{30}{53} \\ \quad y - \dfrac{2}{53} = -\dfrac{2}{53} \end{cases}$$

Infinitas soluciones

$$\begin{cases} x = \dfrac{30}{53} - \dfrac{30}{53}z \\ y = -\dfrac{2}{53} + \dfrac{2}{53}z \\ z = \qquad\qquad z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{30}{53} \\ -\dfrac{2}{53} \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\dfrac{30}{53} \\ \dfrac{2}{53} \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) Para hallar la solución de mínima longitud se extrae la matriz de filas no nulas del sistema equivalente

```
>>A1 = sist_equi(1:2,1:3)
  A1
     1      0     30/53
     0      1     -2/53
>>b1=sist_equi(1:2,4)
  b1 =
     30/53
     -2/53
```

La solución de mínima longitud se calcula considerando la matriz y el vector de términos independientes de filas no nulas

```
>>xlms=A1'*inv(A1*A1')*b1
  xlms =
   0.428225
  -0.028548
   0.243469
>>c=A*xlms
c =
  4.0000
  2.0000
```

2.0000

Esto verifica que xlms es solución del sistema ya que al multiplicarlo por A da por resultado el vector c igual al vector b dado